

Fala elektromagnetyczna

Dr inż. Zbigniew Szklarski

Instytut Elektroniki

szkla@agh.edu.pl

<http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/>

Równania Maxwell'a

Prawo:	Postać całkowa	Postać różniczkowa	Próżnia
Gaussa dla elektrostatyki	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = 0$
Interpretacja:	Źródłem pola elektrostatycznego są ładunki. W próżni pole nie ma źródła.		
Gaussa dla magnetyzmu	$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Interpretacja:	Pole magnetyczne jest bezźródłowe. Nie istnieją pojedyncze bieguny magnetyczne.		

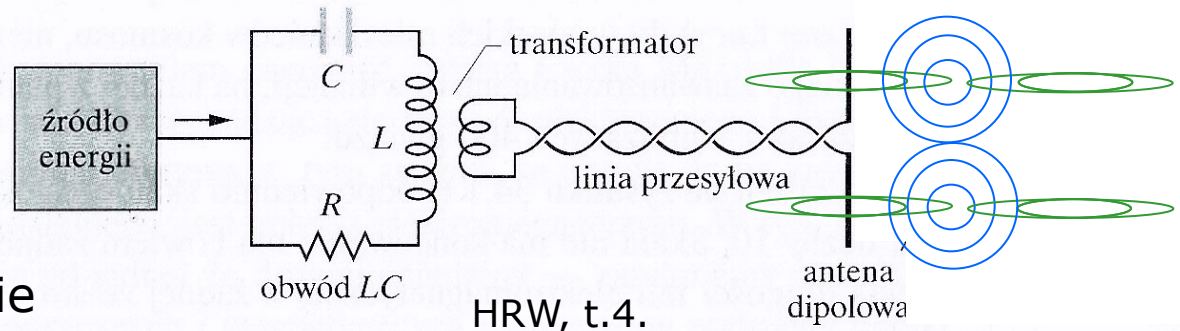
Równania Maxwell'a

Prawo:	Postać całkowa	Postać różniczkowa	Próżnia
Ampere'a- Maxwella	$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_o \left(i + \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	$rot \vec{B} = \mu_o \left(\vec{j} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	$rot \vec{B} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Interpretacja:	Prąd elektryczny lub zmiana strumienia pola/pola elektrycznego powoduje powstanie wirowego pola magnetycznego.		
Faraday'a	$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$	$rot \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$rot \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Interpretacja:	Zmiana strumienia pola/pola magnetycznego powoduje powstanie wirowego pola elektrycznego.		

Fala elektromagnetyczna w próżni – emisja, propagacja, detekcja

1888r. H. Hertz

Zmienny prąd w obwodzie RLC wywołuje oscylacje ładunku w prętach anteny – związany z tym prąd w antenie sinusoidalnie zmienia swój kierunek i wartość



pojawia się wirowe pole magnetyczne

pojawia się wirowe pole elektryczne

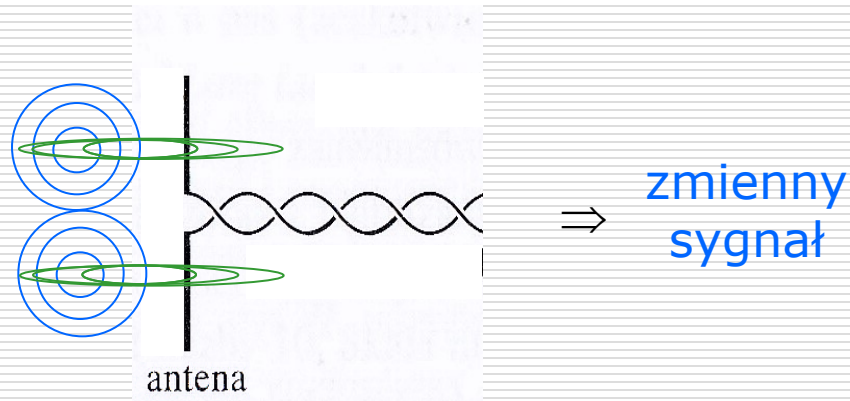
$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \text{rot} \vec{B}$$

$$\mu_0 \vec{j} = \text{rot} \vec{B}$$

$$-\frac{d\vec{B}}{dt} = \text{rot} \vec{E}$$

⇒ pojawia się wirowe pole magnetyczne

⇒



pojawia się
wirowe pole
elektryczne



pojawienie się
wirowe pola
magnetycznego



pojawienie się
zmiennego sygnału
elektrycznego w antenie

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \text{rot} \vec{B}$$

$$-\frac{d\vec{B}}{dt} = \text{rot} \vec{E}$$

Fala elektromagnetyczna w próżni – równanie falowe

□ Fala elektromagnetyczna opisana jest równaniami:

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y = E(x,t)$$

$$B_x = B_y = 0; \quad B_z = B(x,t)$$

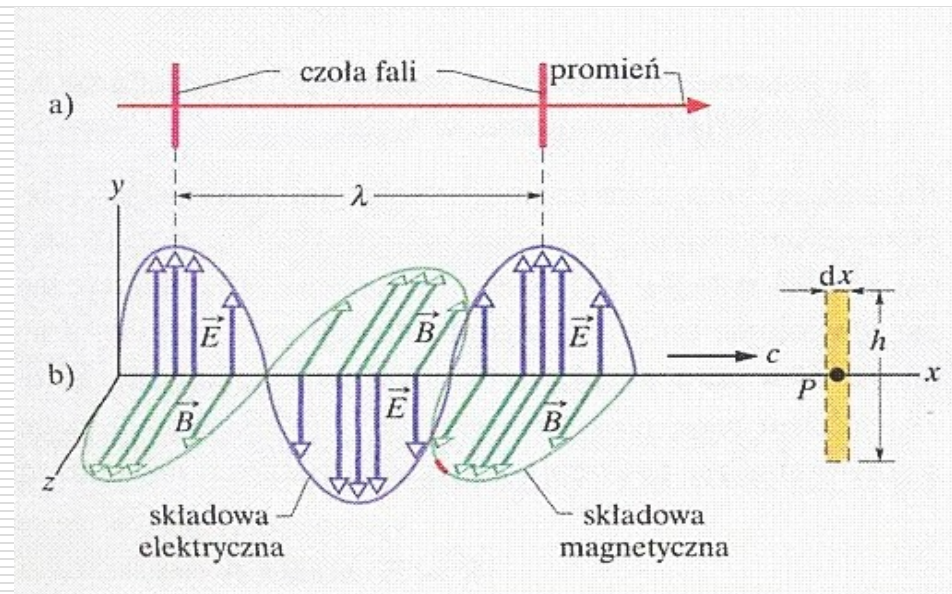
gdzie $E(x,t) = E_m \cdot \cos(\omega t - kx)$

$B(x,t) = B_m \cdot \cos(\omega t - kx)$

i rozchodzi się w kierunku osi OX

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \hat{i} \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial z}}_0$$



$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}$$



$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{k}$$



$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

obliczamy drugie pochodne po t oraz x

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

Z kolei

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \hat{i} \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y}}_0 - \hat{j} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow$$

obliczamy drugie pochodne po t oraz x

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

oraz

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

poprzednio:

stąd



$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$



$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Dla 3 wymiarów

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

jest to "część elektryczna"
równania falowego.

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

to równanie jest „częścią
magnetyczną” równania falowego

dla fali elektromagnetycznej w próżni.

Przypominając równanie 3-wymiarowej fali płaskiej:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

zauważymy, że dla fali elektromagnetycznej w **próżni**

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{E_m}{B_m}$$

Fala elektromagnetyczna w ośrodku

Równania fali dla ośrodka: $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$ $\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$

zatem $\frac{1}{v^2} = \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r = \mu \varepsilon \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \right)$

Bezwzględny współczynnik załamania fali elektromagnetycznej:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

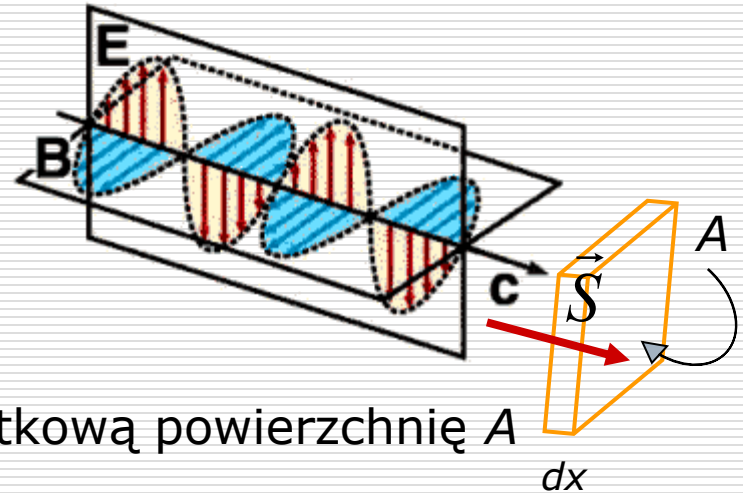
$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

ε_r - względna przenikalność elektryczna
 ε - przenikalność ośrodka

Szybkość przepływu energii fali elektromagnetycznej.

Energia fali przechodząca przez „pudełko” o grubości dx i powierzchni czołowej A

$$dW = dW_E + dW_B = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} EB \cdot A \cdot c \cdot dt$$



Szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię A

$$\frac{dW}{dt \cdot A} = \frac{1}{\mu_0} EB = S \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad \text{jest opisana przez wektor Poyntinga } \vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

którego kierunek jest kierunkiem rozchodzenia się fali i kierunkiem przepływu energii w danym punkcie. Wartości wektorów \mathbf{E} i \mathbf{B} to chwilowe wartości pól w rozpatrywanym punkcie.

Dla dużych częstotliwości E i B użyteczna jest *średnia wartość* S .

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \varepsilon_0 c E^2 \quad \text{zatem} \quad \bar{S} = \varepsilon_0 c \overline{E^2}$$

Dla sinusoidalnie zmiennych E i B $\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2}$ podobnie jak dla prądu zmiennego

$$\text{Zatem} \quad \bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}$$

Promieniowanie słoneczne dostarcza do górnych warstw atmosfery z szybkością $1350 \text{ J}/(\text{s}\cdot\text{m}^2)$. Zakładając, że jest to pojedyncza fala sinusoidalna obliczyć maksymalne wartości E oraz B .

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = 1350 \frac{\text{J}}{\text{sm}^2} \quad \text{stąd} \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\varepsilon_0 c}} = 1,01 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$c = \frac{E_0}{B_0} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Zadanie

W nieskończenie długim przewodniku o promieniu R i przewodnictwie właściwym σ , płynie prąd o gęstości j (jednakowej w całym przekroju poprzecznym przewodnika). Oblicz:

- natężenia pól E i B na powierzchni tego przewodnika.
- wartość wektora Poyntinga na powierzchni tego przewodnika.
- Uzupełnij rysunek przewodnika z prądem o wektory \vec{E} , \vec{B} , \vec{S}

$$\rho = \frac{E}{j} \Rightarrow E = \frac{j}{\sigma} \quad \oint B dl = \mu_0 i \quad i = \pi R^2 j \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j R}{2}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad S = \frac{1}{\mu_0} \frac{j}{\sigma} \frac{\mu_0 j R}{2} = \frac{j^2 R}{2\sigma}$$

