

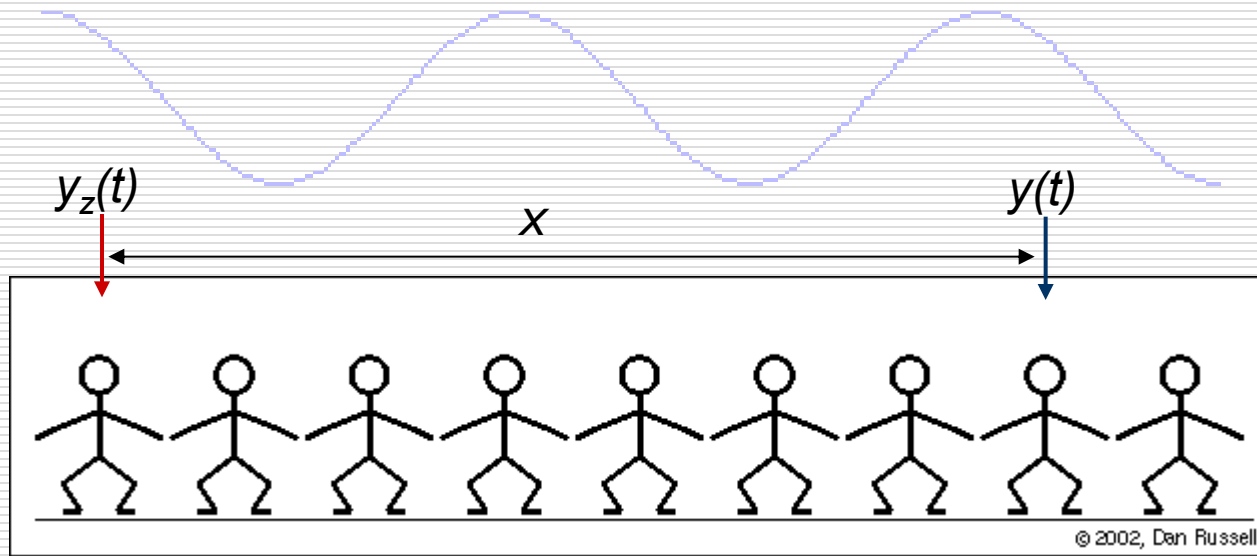
Równanie fali

Drgania „źródła” : $y_z(t) = A \sin(\omega t)$

Zaburzenie dociera się do „odbiornika” po czasie $t' = x/v$

Równanie drgań „odbiornika” jest więc opóźnione w fazie:

$y(t) = A \sin(\omega t - \varphi_0)$ gdzie $\varphi_0 = \omega t'$



Częstość drgań źródła i odbiornika są takie same $\Rightarrow \omega = \frac{\varphi_0}{t'}$

Równanie drgań odbiornika $\rightarrow y = A \sin(\omega t - \varphi_0)$

Kąt fazowy φ_0 jest określony przez szybkość fali v i odległość od

źródła x : $v = \frac{x}{t'}$ a zatem: $\varphi_0 = \omega t' = \omega \frac{x}{v}$

$$y = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x \right) = y(x, t)$$

wprowadzając oznaczenie $\frac{\omega}{v} = k$ gdzie k to *liczba falowa*

otrzymujemy równanie fali rozchodzącej się w kierunku dodatnim

osi $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$ lub równoważne $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

lub dla fali rozchodzącej się w kierunku ujemnym osi X:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t + kx)$$

Skoro $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a $v = \frac{\lambda}{T}$ więc $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$y(x, t) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

faza fali

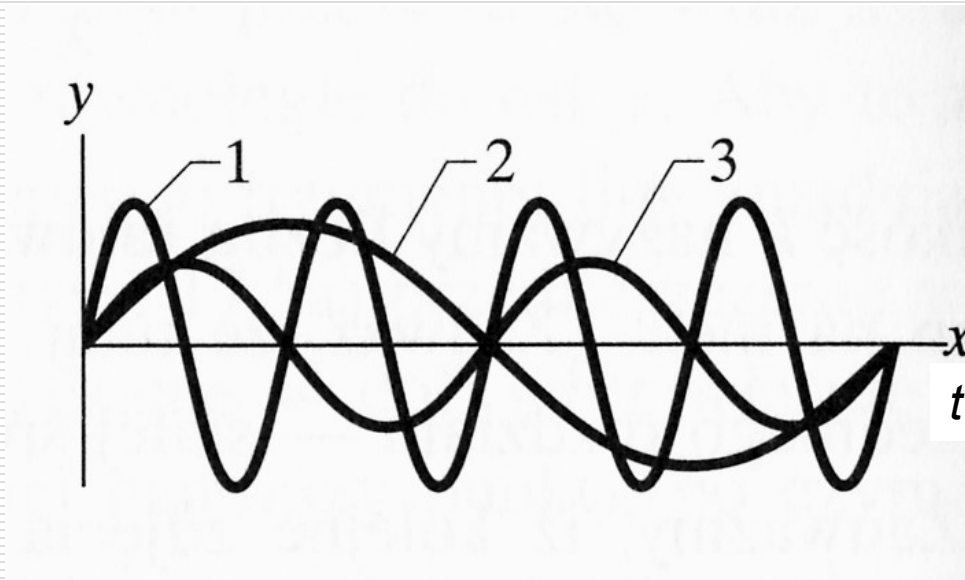


W przestrzeni trójwymiarowej:

$$y(\vec{r}, t) = y_m \sin(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t)$$
 gdzie $\vec{k}$ jest to wektor falowy

Przykład

Na rysunku nałożono trzy zdjęcia migawkowe, przedstawiające fale biegnące wzdłuż pewnej linii. Fazy fal są opisane zależnościami: (a) $2x-6t$, (b) $4x-16t$, (c) $8x-4t$. Dopasuj wykresy do tych wyrażeń.



$$y(x): (a)-2 \quad (b)-3 \quad (c)-1$$

$$y(t): (a)-3 \quad (b)-1 \quad (c)-2$$

Prędkość fali biegnącej

Wychylenie punktu ośrodka ciągle się zmienia $\Rightarrow$ punktowi fali o ustalonej fazie odpowiada co chwilę inny punkt ośrodka.

Warunek stałości fazy: $kx - \omega t = \text{const}$

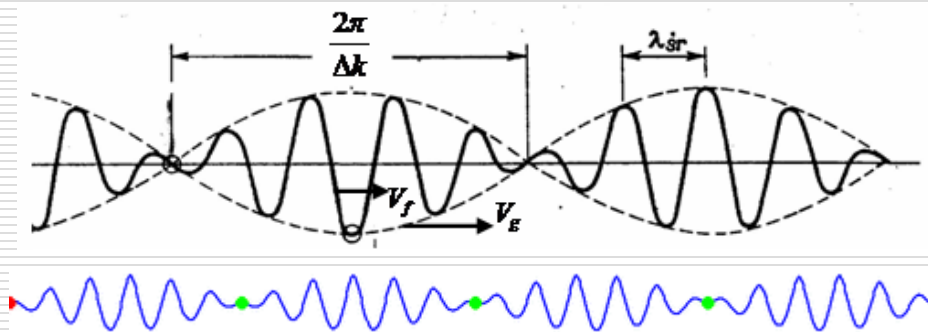
Prędkość fali – prędkość z jaką przemieszczają się punkty fali o tej samej fazie obliczamy z pochodnej tego wyrażenia:

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

Jest to prędkość fazowa - prędkość powierzchni fazowej (czoła fali).

Jeżeli fala dana jest równaniem $y(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$ wówczas jej prędkość $v = -\frac{\omega}{k} < 0$ co oznacza falę biegnącą w lewo.

- Prędkość fazowa: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$
- Prędkość grupowa, to prędkość grupy („paczki”) fal nieznacznie różniących się od siebie częstością:
- Przykład: dwie fale o takich samych amplitudach ale nieznacznie różniących się długościami interferują ze sobą dając prawie harmoniczną falę biegnącą o modulowanej amplitudzie.



$$\omega = \omega(k) = v_f \cdot k \quad \vec{v}_g = \frac{d\vec{\omega}}{d\vec{k}} = \frac{d}{dk}(v_f k) \quad \Rightarrow \quad v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk}$$

- Prędkość grupowa jest ważna w zjawiskach falowo-korpuskularnych.

Od czego zależy prędkość fali ?

Prędkość fali mechanicznej określa bezwładność i sprężystość ośrodka

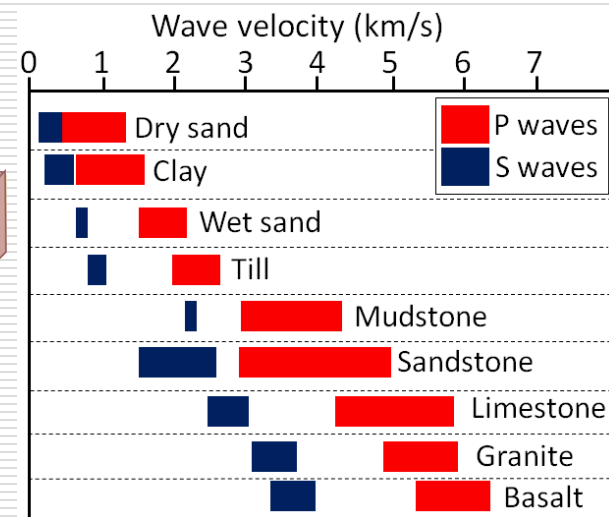
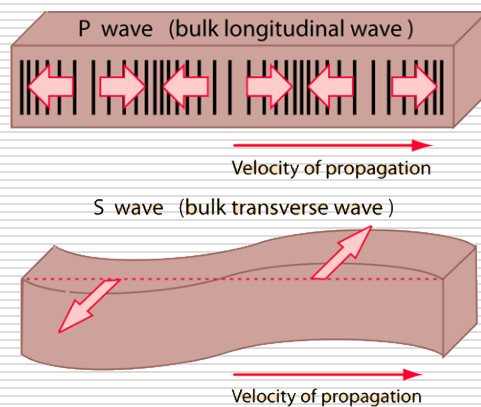
□ Prędkość fali mechanicznej w ciele stałym:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

← moduł Younga

← gęstość

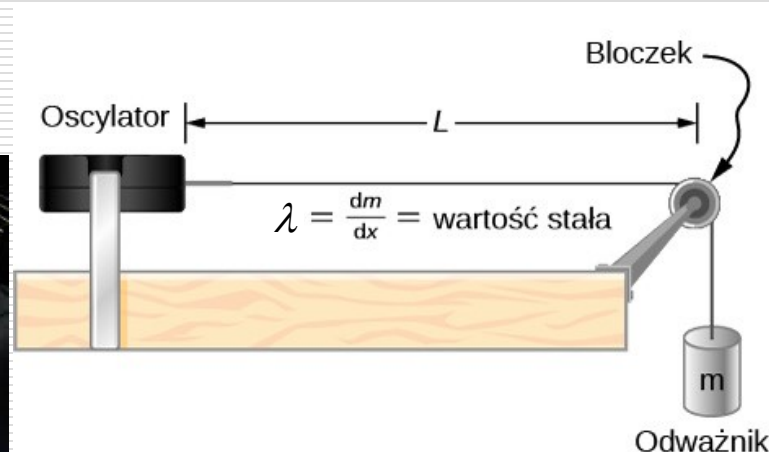
Speed of Sound	
Medium	Speed (m/s)
Air at 0°C	331
Air at 20°C	343
Water at 20°C	1482
Lead	1960
Glass	5640
Steel	5960



W strunie:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\lambda}}$$

← naprężenie
← gęstość liniowa



❑ Prędkość fali akustycznej w gazie:

moduł ścisłości $B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$
gęstość

$$v = \sqrt{\frac{\chi \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\chi RT}{\mu}}$$

$$\chi = \frac{c_p}{c_v}$$

Gas	Speed of Sound (m/s)
Xenon	178
Sulfur Dioxide	201
Krypton	221
Propane	258
Carbon Dioxide	267
Argon	319
Oxygen	326
Ethylene	327
Nitrogen	349
Methane	446
Helium	1007
Hydrogen	1270

Temperature	Speed of sound
<u>T (°C)</u>	<u>c (m/s)</u>
35	351.88
30	349.02
25	346.13
20	343.21
15	340.27
10	337.31
5	334.32
0	331.30
-5	328.25
-10	325.18
-15	322.07
-20	318.94
-25	315.77

Równanie falowe – różniczkowe równanie ruchu fali

Równanie fali $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$ przypomina rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego. Sprawdźmy jakiego równania jest naprawdę rozwiązaniem:

□ obliczamy pochodne:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t) = \underline{-\omega^2 y(x,t)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \sin(kx - \omega t) = \underline{-k^2 y(x,t)}$$

□ skoro $\omega = v \cdot k$ to $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underline{-v^2 k^2 y(x,t)}$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

więc ostatecznie :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Równanie falowe 3D

Zaburzenie jest opisywane funkcją $\Psi(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta \quad \text{Operator różniczkowy Laplace'a (laplasjan)}$$

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Energia i natężenie fali

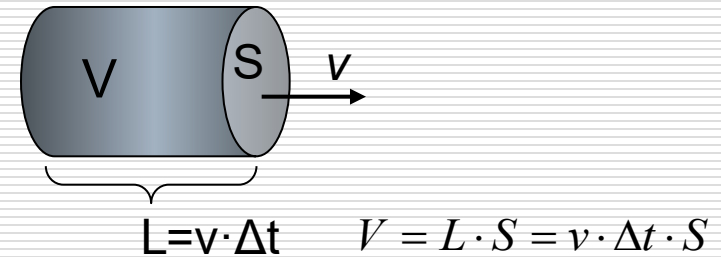
- Średnia energia ruchu drgającego elementu ośrodka o masie m , objętości V wynosi $\bar{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$
- a średnia gęstość energii $\langle w_E \rangle = \frac{\bar{E}}{V} = \frac{1}{2} \frac{m}{V} \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$
- Natężenie fali – określa przepływ energii (z szybkością v) w jednostce czasu przez jednostkowy wycinek powierzchni falowej

$$I = \frac{\bar{E}}{S \cdot \Delta t} = \frac{\bar{P}}{S}$$

- natężenie czyli średnia moc przechodząca przez jednostkowy wycinek powierzchni falowej

$$[I] = 1 \text{ W/m}^2$$

Przez powierzchnię S , w czasie Δt przejdzie tyle energii fali ile jest zawarte w objętości V



$$\bar{E} = \langle w_E \rangle \cdot V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \cdot \Delta t \cdot S$$

zatem natężenie

$$I = \frac{\bar{E}}{S \cdot \Delta t} = \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \omega^2 A^2$$

Zależność natężenia i średniej mocy fali od kwadratu amplitudy oraz od kwadratu częstości ma charakter ogólny i obowiązuje dla wszystkich rodzajów fal mechanicznych

Dla fal elektromagnetycznych nie zależy od częstości fali