

Międzynarodowa Norma Oceny Niepewności Pomiaru (Guide to Expression of Uncertainty in Measurements - Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna ISO)

RACHUNEK NIEPEWNOŚCI POMIARU

<http://physics.nist.gov/Uncertainty>

Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. Warszawa, Główny Urząd Miar 1999

H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999

A.Zięba, Postępy Fizyki, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247

A.Zięba, Pracownia Fizyczna WFiTJ, Skrypt Uczelniany SU 1642, Kraków 2002

WSTĘP

W trakcie pomiaru uzyskujemy wartości różniące się od przewidywań teorii. Gdy doświadczenie staje się doskonalsze, niepewności pomiarowe maleją. W ogólności rozbieżność między teorią i eksperymentem zależy od:

- Niedoskonałości człowieka (osoby wykonującej pomiar)
- Niedoskonałości przyrządów pomiarowych
- Niedoskonałości obiektów mierzonych

Terminologia

„Niepewność” a błąd pomiaru

W przypadku pojedynczych pomiarów stosujemy określenia:

Błąd bezwzględny: $\Delta = x - x_0$ (1) [wymiar x]

Błąd względny: $\delta = \frac{\Delta}{x_0}$ (2) [bezwymiarowe]

Gdzie x – wartość zmierzona, x_0 – wartość rzeczywista

Niepewność

Wielkości określone wzorami (1) i (2) są pojedynczą realizacją zmiennej losowej i nie wchodzą do teorii niepewności. W praktyce nie znamy wartości rzeczywistych wielkości mierzonych i szacujemy **niepewności pomiarowe** wynikające ze statystycznych praw rozrzutu pomiarów.

Niepewność jest parametrem związanym z pomiarem.

Istotny jest również problem niepewności przypisywanej wielkości złożonej (wyliczanej ze wzoru fizycznego)

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Podział błędów

Wyniki pomiarów podlegają pewnym prawidłowościom, tzw. rozkładom typowym dla zmiennej losowej. Z tego względu błędy dzielimy na:

- **Błędy grube** (pomyłki) - eliminować
- **Błędy systematyczne** - poprawki
- **Błędy przypadkowe** – podlegają rozkładowi Gaussa, wynikają z wielu losowych przyczynków, nie dają się wyeliminować

Typy oceny niepewności wg nowej Normy

Typ A

Metody wykorzystujące statystyczną analizę serii pomiarów:

- wymaga odpowiednio dużej liczby powtórzeń pomiaru
- ma zastosowanie do błędów przypadkowych

Typ B

Opiera się na naukowym osądzie eksperymentatora wykorzystującym wszystkie informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności

- stosuje się gdy statystyczna analiza nie jest możliwa
- dla błędu systematycznego lub dla jednego wyniku pomiaru

TYP B

Teoria niepewności maksymalnej

To podejście zakłada, że można określić przedział wielkości mierzonej x , w którym na pewno znajdzie się wielkość rzeczywista. W zapisie

$$x \pm \Delta x$$

gdzie Δx jest niepewnością maksymalną

nie posługujemy się rachunkiem prawdopodobieństwa.

Metoda różniczki zupełnej

Dla wielkości złożonej $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ gdy niepewności maksymalne Δx_1 , Δx_2 , ... Δx_n są małe w porównaniu z wartościami zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n niepewność maksymalną wielkości y wyliczamy z praw rachunku różniczkowego:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \right| \Delta x_n \quad (3)$$

Przykład

Z pomiarów U i I wyliczmy $R = U / I$

Niepewność maksymalna oporu ΔR (wg. wzoru 3)

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial U} \right| |\Delta U| + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| |\Delta I|$$

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

$$\Delta R = \frac{1}{I} \Delta U + \frac{U}{I^2} \Delta I$$

Niepewność względna

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

Na wartości ΔU i ΔI mają wpływ dokładności przyrządów.

Dla mierników analogowych korzystamy z klasy dokładności przyrządu, np.

$$\Delta U = \frac{\textit{klasa} \cdot \textit{zakres}}{100}$$

Dla mierników cyfrowych niepewność jest najczęściej podawana w instrukcji obsługi jako zależna od wielkości mierzonej x i zakresu pomiarowego z

$$\Delta x = c_1 x + c_2 z$$

np. multimetr $c_1=0.2\%$, $c_2=0.1\%$

przy pomiarze oporu $R=10 \text{ k}\Omega$ na zakresie $z = 20 \text{ k}\Omega$ da niepewność $\Delta R=0.04 \text{ k}\Omega$, tj. równowartość 4 działek elementarnych

Dawniej uważano, że miarą błędu systematycznego może być tylko niepewność maksymalna. Nowa Norma traktuje błąd systematyczny jako zjawisko przypadkowe, gdyż nie znamy *a priori* jego wielkości i znaku. Norma zaleca stosowanie niepewności standardowej u .

A zatem dla przykładu omawianego:

$$u(R) = \frac{\Delta R}{\sqrt{3}}$$

Niepewność standardowa

Jest miarą dokładności pomiaru uznawaną za podstawową. Definicja mówi:

Niepewność standardowa jest oszacowaniem odchylenia standardowego.

Symbolika: u lub $u(x)$ lub $u(\text{stężenie NaCl})$

1. Wynik pomiaru jest zmienną losową, której rozrzut charakteryzuje parametr zwany odchyleniem standardowym
2. Dokładnej wartości odchylenia standardowego nie znamy. Niepewność standardowa jest jego niezbyt dokładnym **oszacowaniem**.

Niepewność u posiada wymiar, taki sam jak wielkość mierzona

Niepewność względna $u_r(x)$ to stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej:

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{x}$$

Niepewność względna jest wielkością bezwymiarową i może być wyrażona w %

TYP A

Rozkład normalny Gaussa

Gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia wielkości x lub jej błędu Δx podlega rozkładowi Gaussa

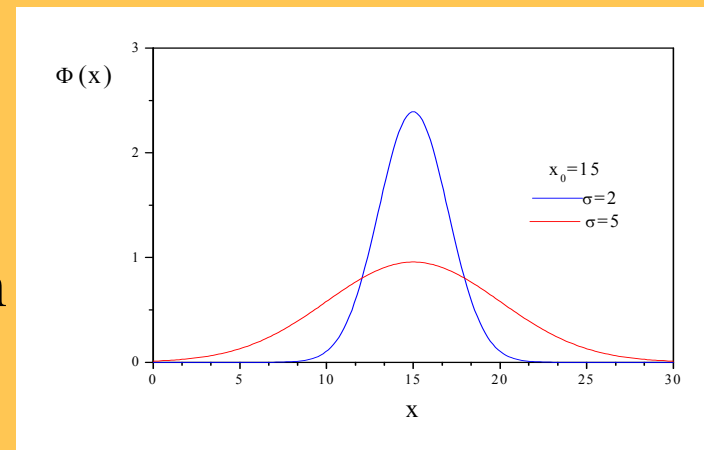
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

x_0 jest wartością najbardziej prawdopodobną i może być nią wartość średnia

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

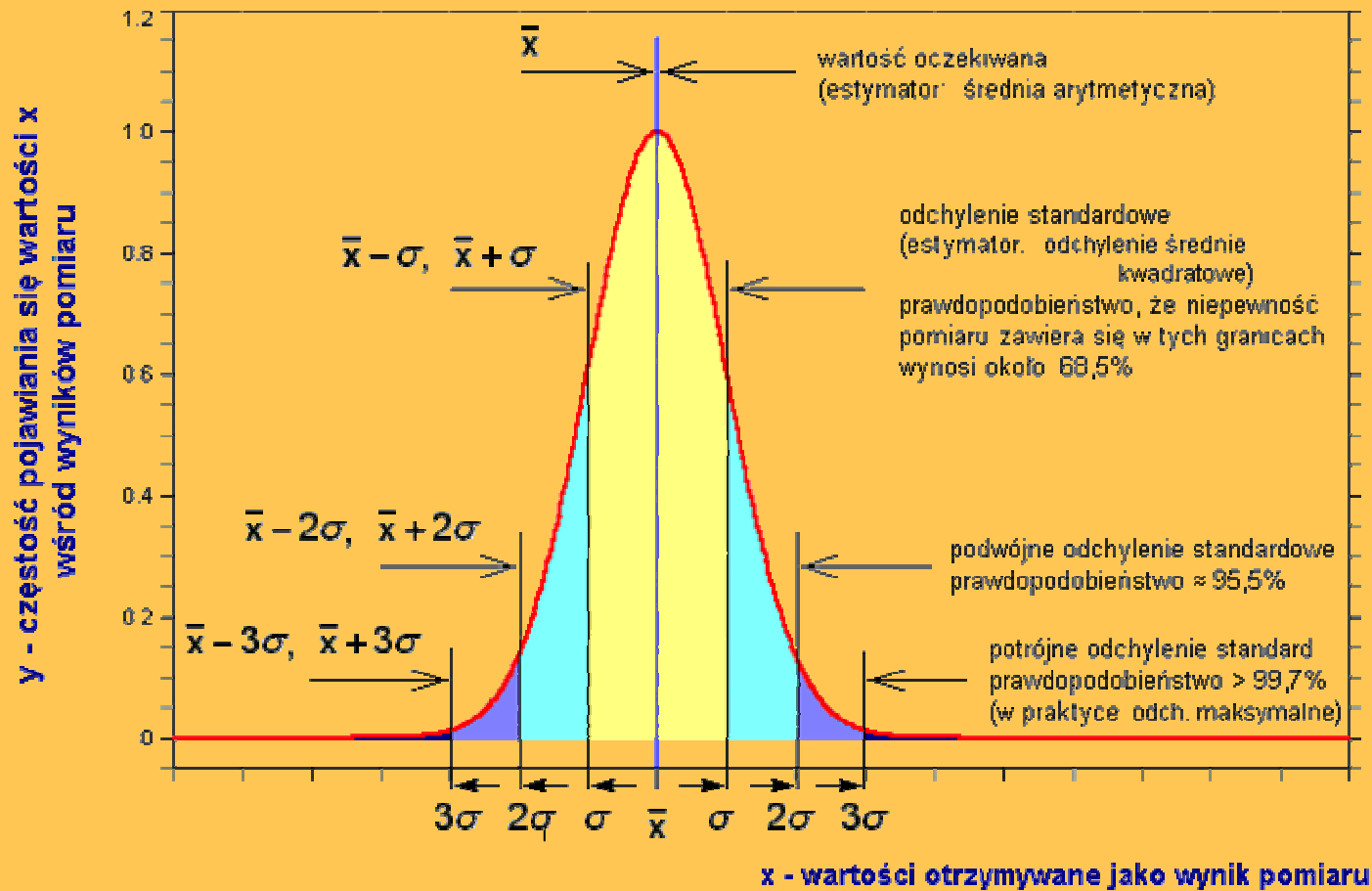
σ jest odchyleniem standardowym

σ^2 jest wariancją



W przedziale $x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma$ mieści się ok. 68% wszystkich pomiarów

Rozkład normalny Gaussa



$$\sigma = u(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Prawo przenoszenia niepewności

Niepewność standardową wielkości złożonej $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obliczamy z tzw. prawa przenoszenia niepewności jako sumę geometryczną różniczek cząstkowych

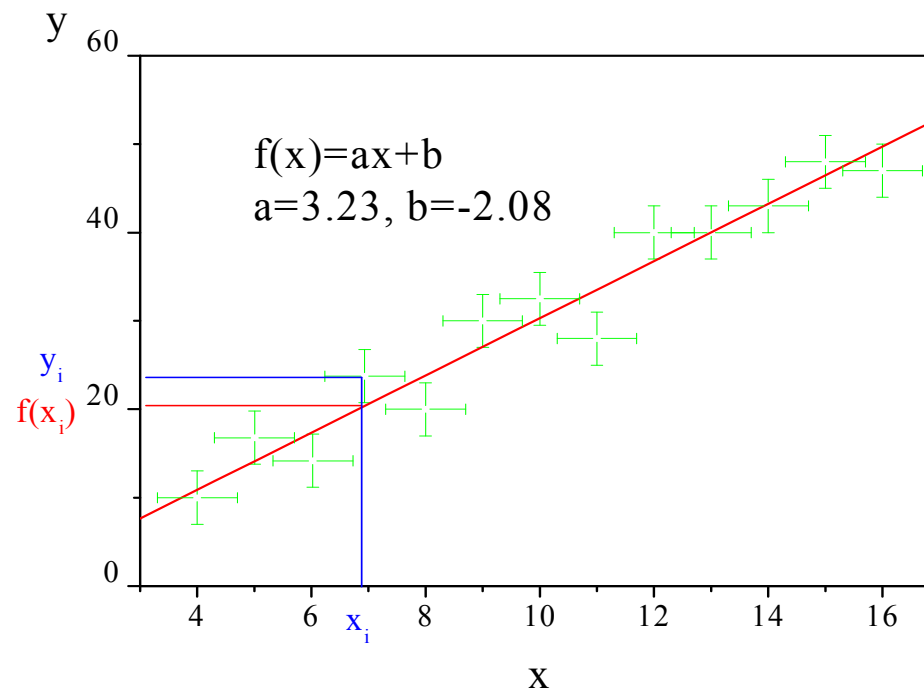
$$u_c(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1} u(x_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2} u(x_2) \right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial y}{\partial x_n} u(x_n) \right]^2}$$

$$u_{cr}(y) = \frac{u_c(y)}{y}$$

Metoda najmniejszych kwadratów

Regresja liniowa

$$S^2 = \sum_i^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min$$



Warunek minimum funkcji dwu zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

Otrzymuje się układ równań liniowych dla niewiadomych a i b

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$a \sum x_i + b n = \sum y_i$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymuje się wyrażenia na a i b

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{W}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{W}$$

$$W = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$$

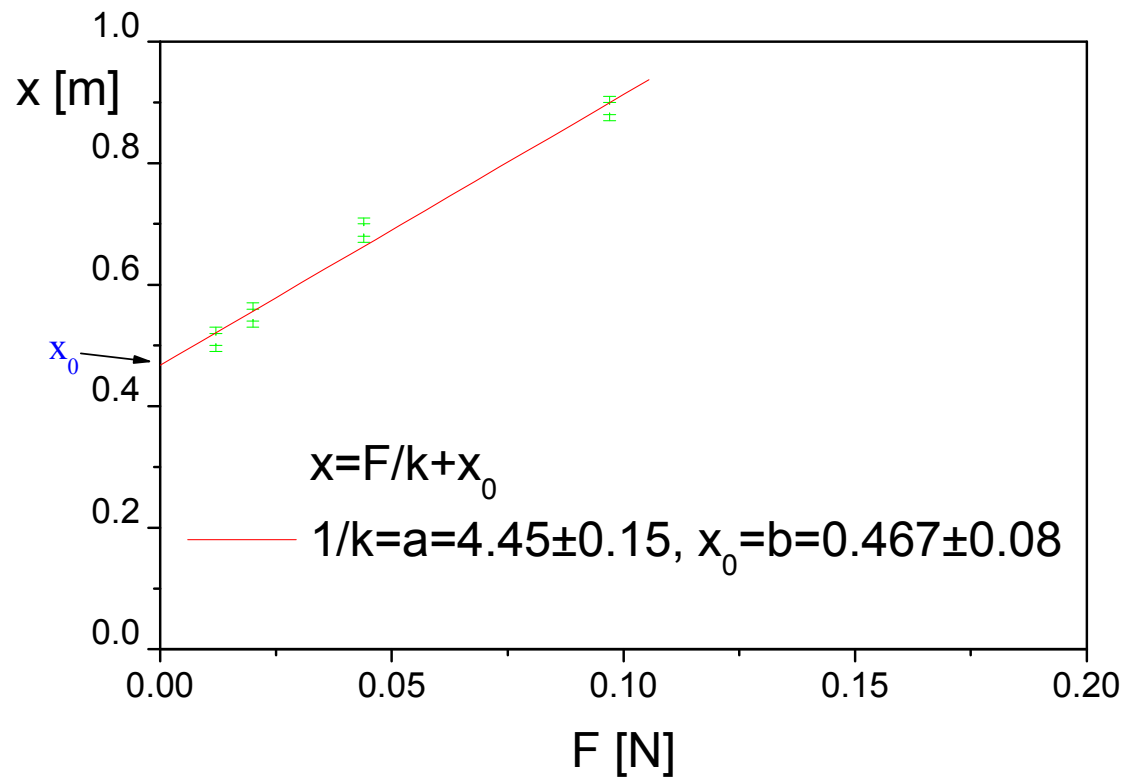
Z praw statystyki można wyprowadzić wyrażenia na odchylenia standardowe obu parametrów prostej:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \sqrt{\frac{S^2}{W}}$$

$$u(b) = u(a) \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

Przykład zastosowania regresji liniowej $y=ax+b$

Prawo Hooke'a



Dopasowywanie właściwej funkcji

Model matematyczny musi pasować do modelu fizycznego!!!

Przykład:
prawo Ohma

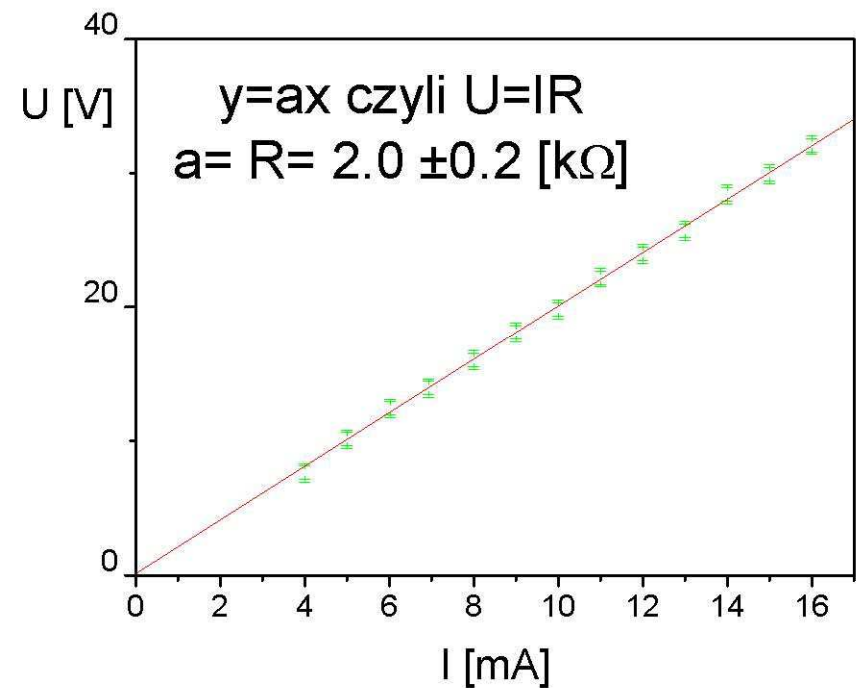
$$U=R \cdot I$$

czyli

$$Y=a \cdot x$$

a nie $y=ax+b$

Wyraz wolny $b=0!$



Regresja liniowa jednoparametrowa

$$S^2 = \sum_i^n [y_i - ax_i]^2 = \min$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0$$

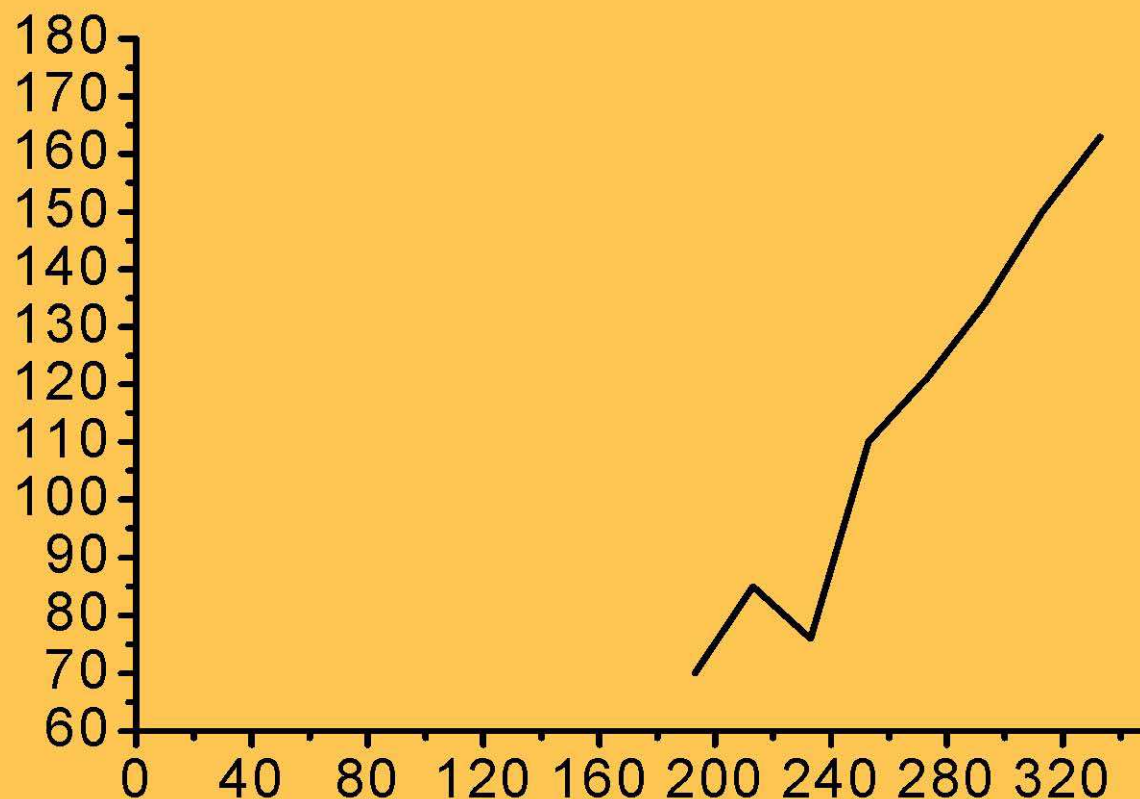
$$-2 \sum x_i y_i + 2a \sum x_i^2 = 0$$

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

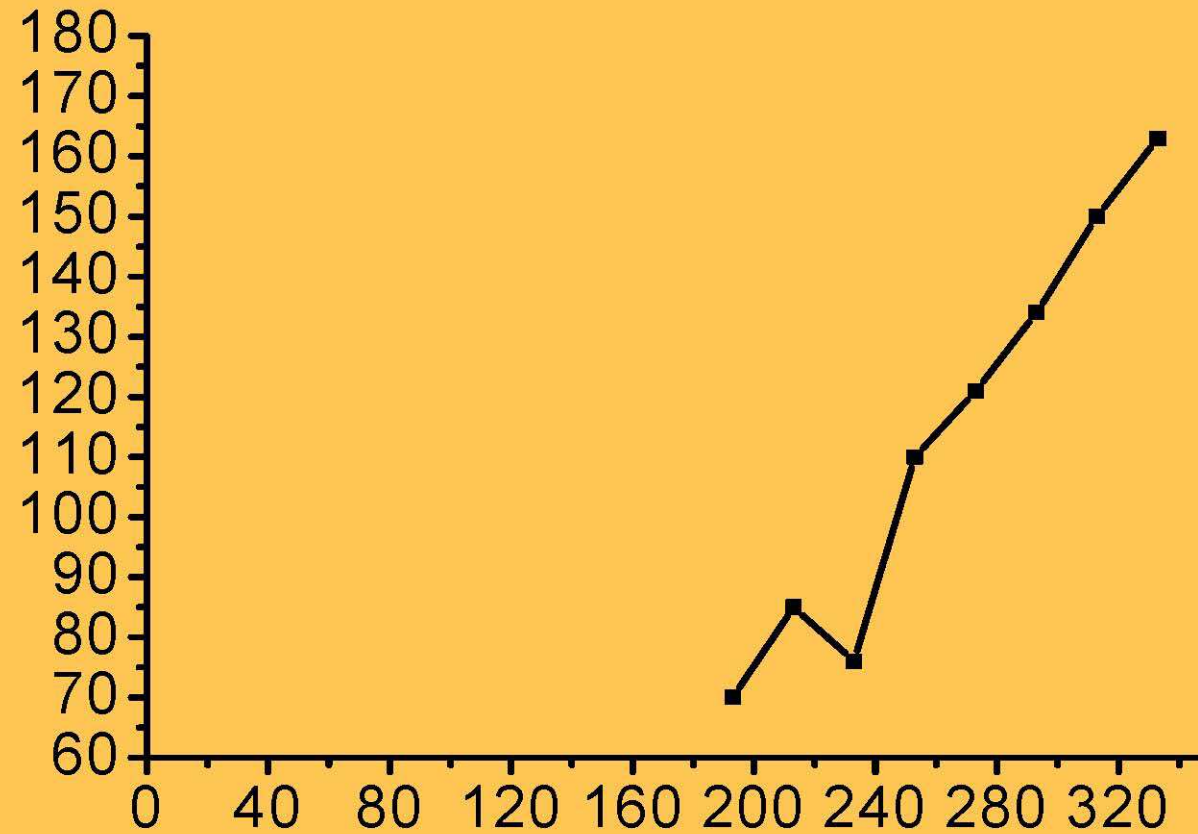
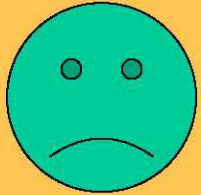
$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n [(ax_i - y_i)^2]}{\sum_{i=1}^n [x_i^2]}}$$

Zasady rysowania wykresów

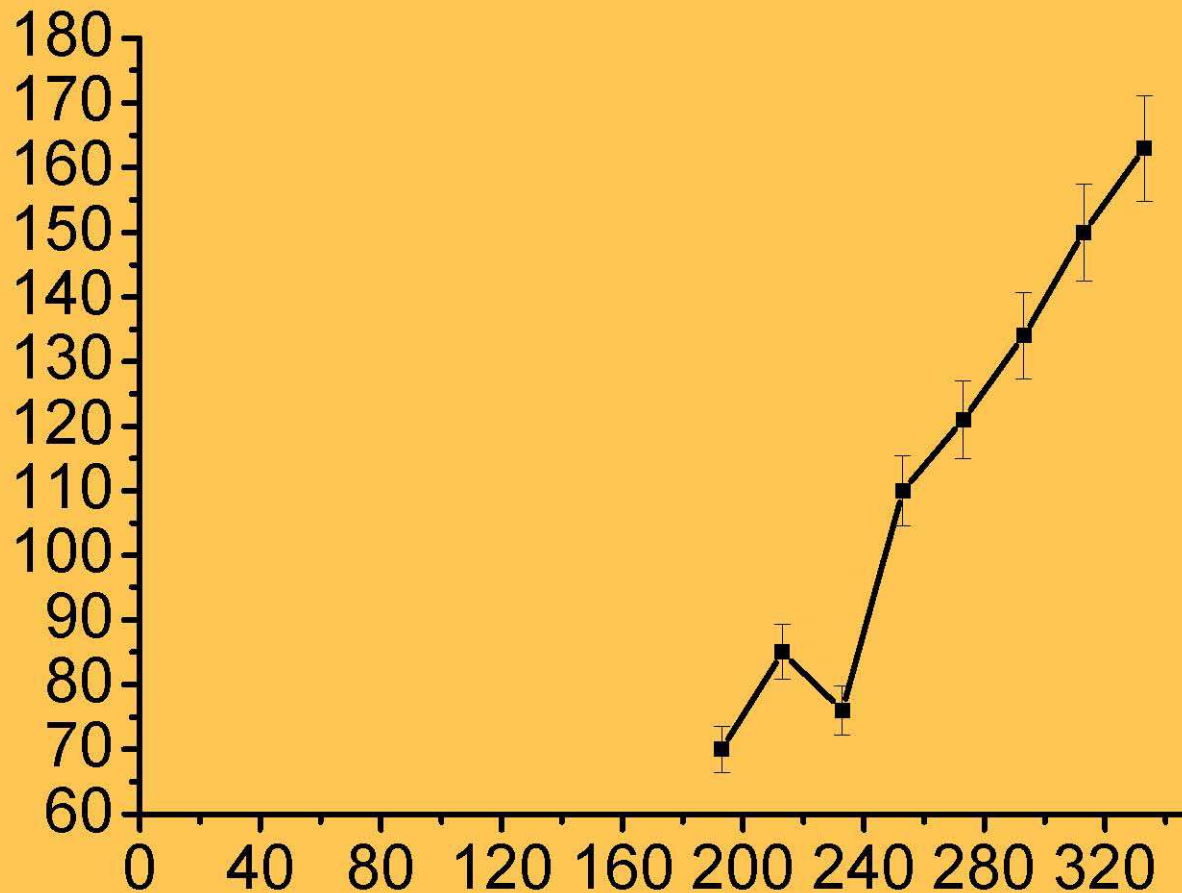
Czy ten wykres jest narysowany zgodnie z zasadami?



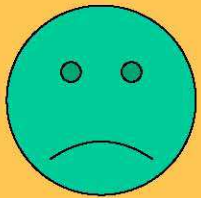
2. Trzeba



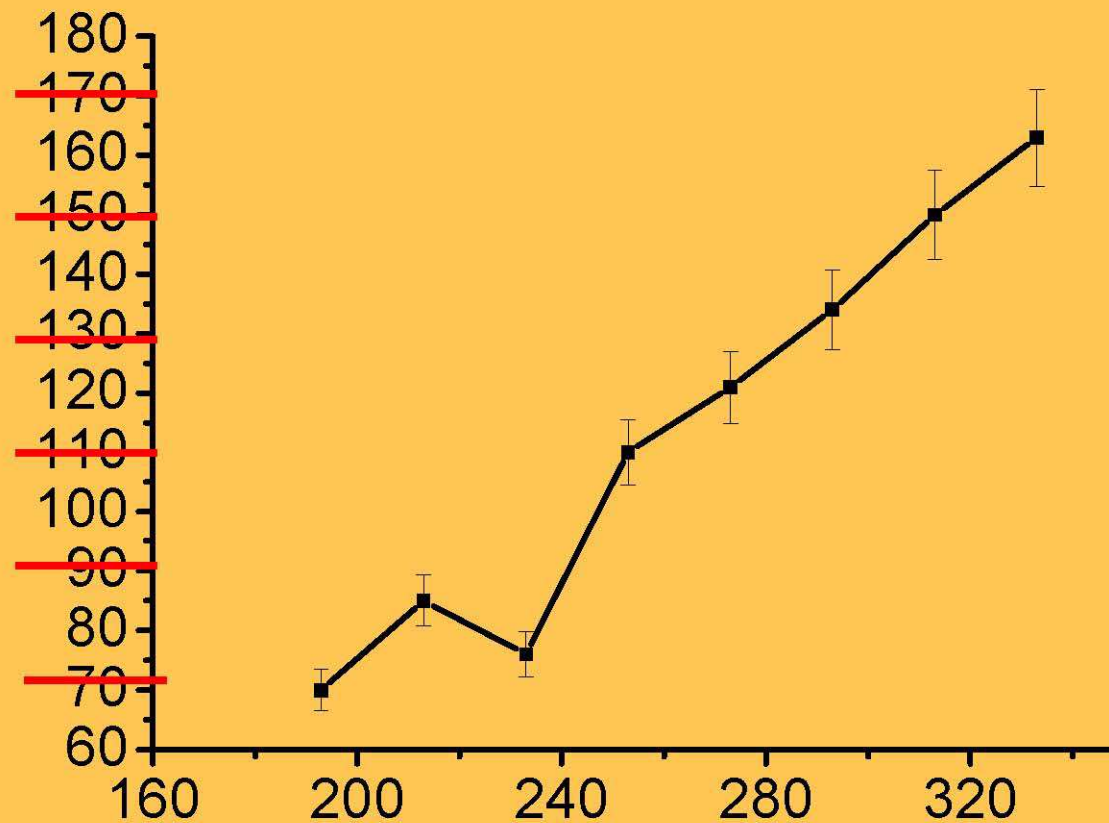
3. Dobrać zakresy osi współrzędnych odpowiednio do zakresu zmienności danych pomiarowych !!!



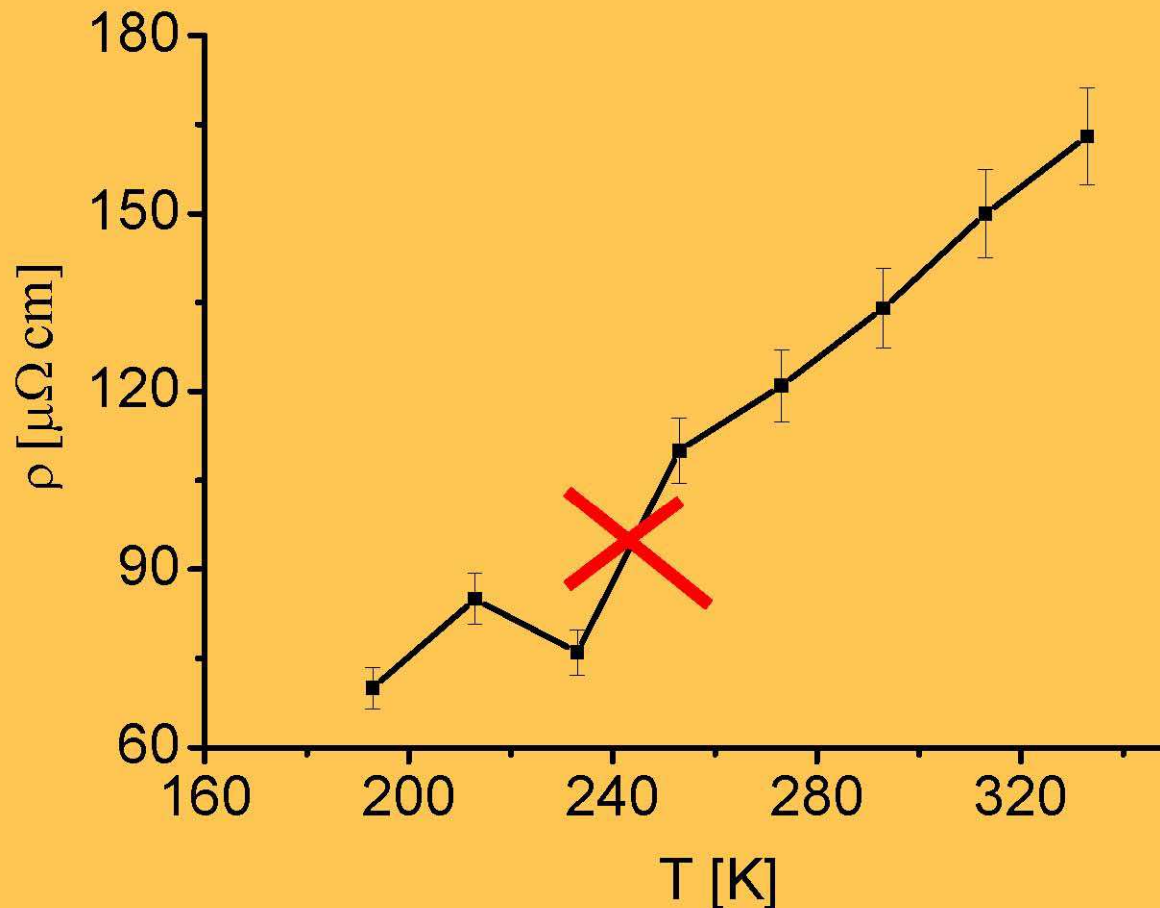
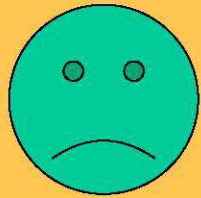
4. Właściwie opisać osie współrzędnych i dobrać skalę, tak aby łatwo można było odczytać wartości zmierzone.



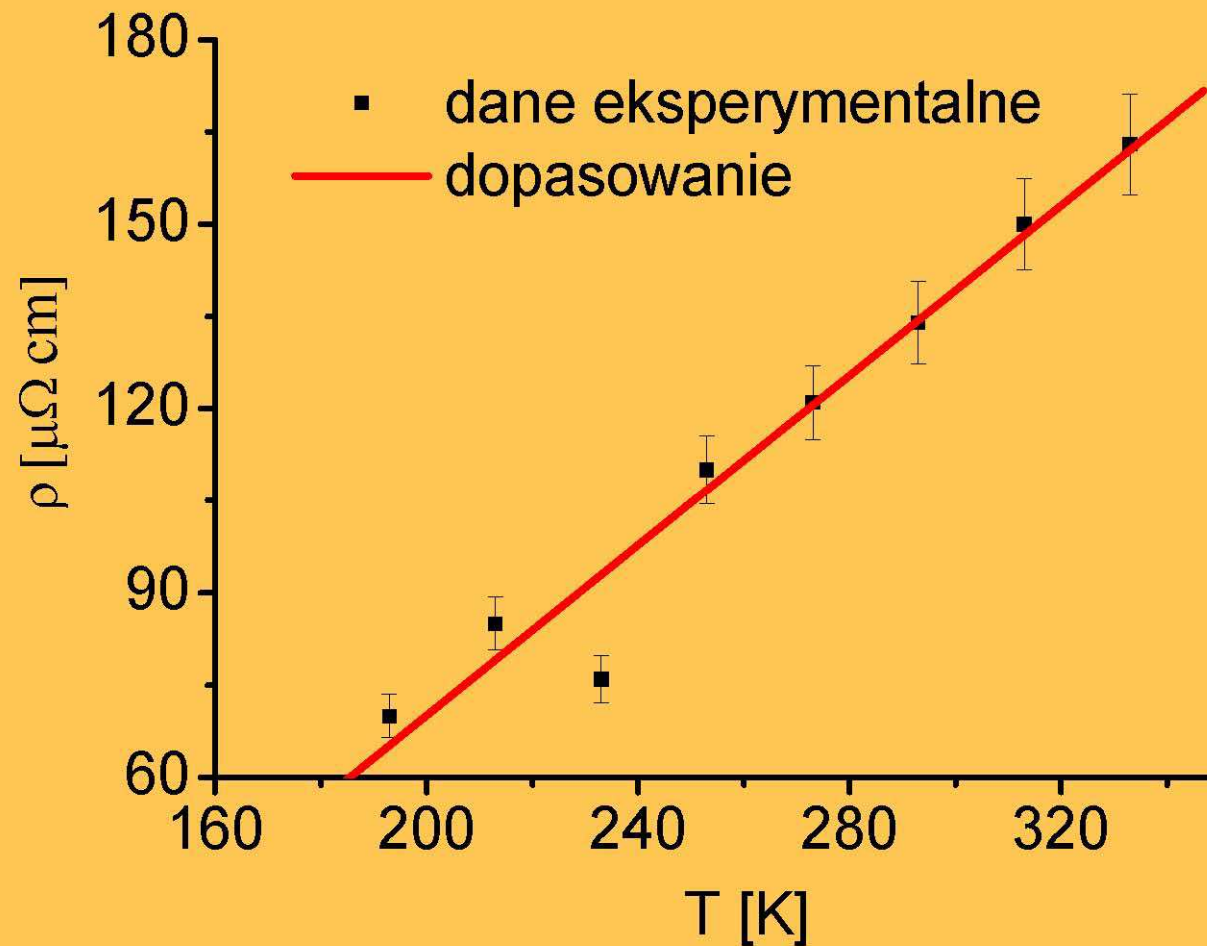
*i co
jeszcze ??*



5. Nie łączyć punktów eksperymentalnych linią łamaną!!! Jeśli znany jest przebieg teoretyczny to dokonać dopasowania teorii do doświadczenia (przeprowadzić fitowanie)



6. Zadbać o aspekt estetyczny wykresu (opis, zamknięcie ramką, itp.)





Wykres 1

Rezystywność ρ próbki Bi w funkcji temperatury T

