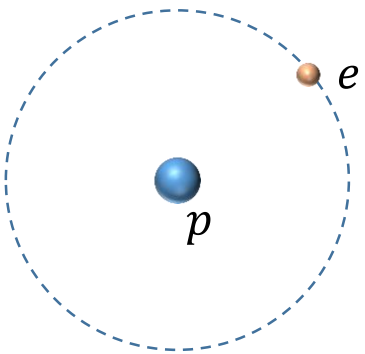
Wykład 11

Elektrostatyka

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak

Oddziaływanie elektryczne – ładunki

Za oddziaływania elektryczne odpowiedzialne są **ładunki elektryczne**



Elektron e : ładunek elementarny ujemny – e

Proton p : ładunek elementarny dodatni + e

Wszystkie istniejące ładunki są wielokrotnością ładunku elementarnego e

$$e = 1.602 \cdot 10 - 19\ C$$

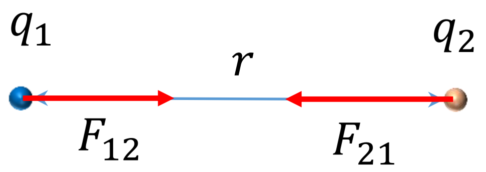
W układzie SI jednostką ładunku jest kulomb [C]. Jest to ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu 1 ampera w czasie 1 sekundy 1 [C] = 1 [A·s]

- **Zasada zachowania ładunku:**

Całkowity ładunek układu odosobnionego, tzn. algebraiczna suma dodatnich i ujemnych ładunków występujących w dowolnej chwili, nie może ulegać zmianie.

$$\boxed{Q_{całk} = const}$$

Prawo Coulomba



Charles Coulomb

1736-1806

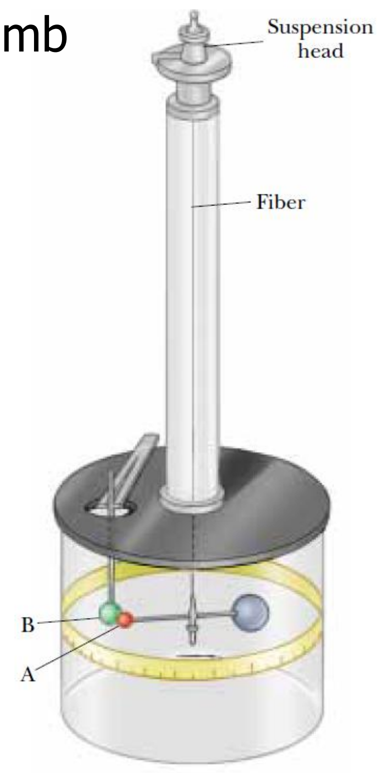


Figure 23.5 Coulomb's torsion balance, used to establish the inverse-square law for the electric force between two charges.

Każde dwa ładunki punktowe q_1 i q_1 oddziaływają wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu tych ładunków, a odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi.

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}}$$

Ładunki jednoimienne odpychają się, a różnoimienne przyciągają

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

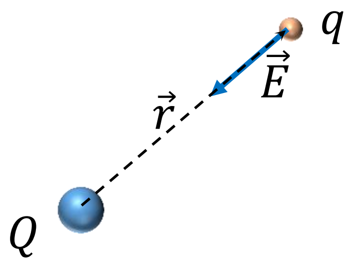
$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ [\frac{C^2}{N \cdot m^2}]$$

przenikalność elektryczna próżni

1785r. – waga skręceń

Natężenie pola elektrycznego

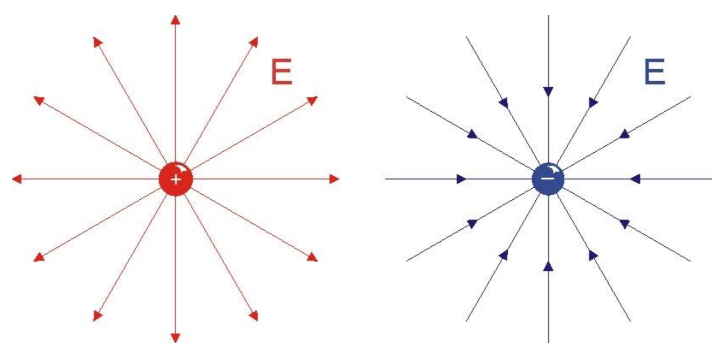
Natężenie pola elektrycznego definiujemy jako siłę działającą na ładunek próbny q (umieszczony w danym punkcie przestrzeni) podzieloną przez ten ładunek.



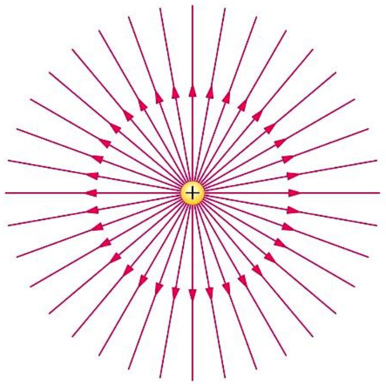
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F} = \frac{1}{q}k\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

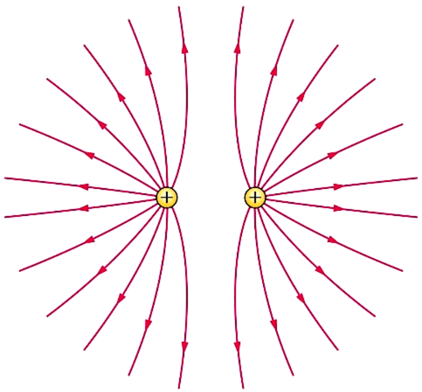
Ładunek próbny jest dodatni więc kierunek wektora E jest taki sam jak kierunek siły działającej na ładunek dodatni.



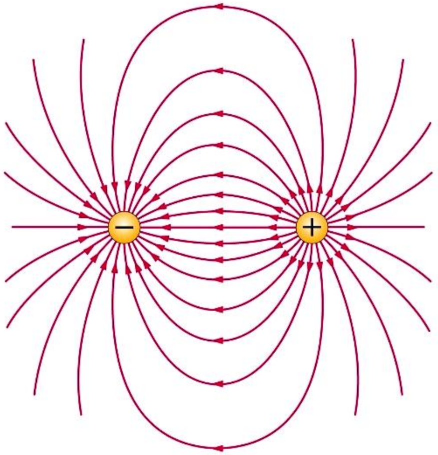
Linie pola elektrostatycznego



ładunek punktowy

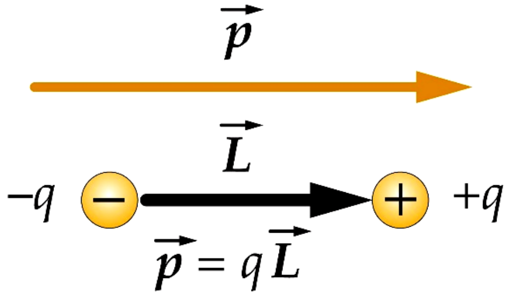


dwa ładunki jednoimienne



dwa różnoimienne
ładunki w małej
odległości

dipol elektryczny



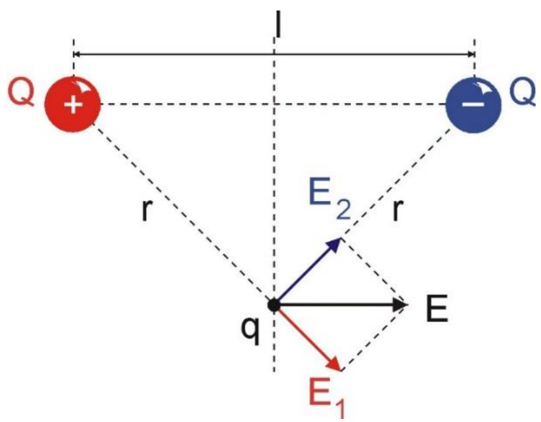
$\vec{p}$ - moment dipolowy

Zasada superpozycji – punktowy rozkład ładunku

Gdy mamy do czynienia z kilkoma naładowanymi ciałami, wypadkowe natężenie pola (siłę wypadkową), obliczamy dodając wektorowo natężenia pól od pojedynczych ładunków.

Natężenie pola pochodzące od wielu ładunków punktowych (rozkład dyskretny) → $$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Przykład dipol elektryczny

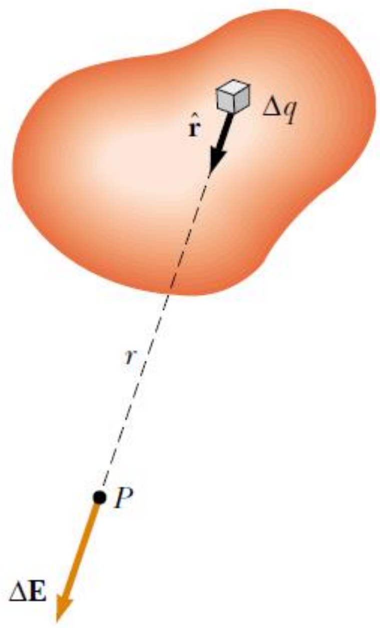


$$\frac{E}{E_1} = \frac{l}{r}$$

$$E = \frac{l}{r} E_1 = \frac{l}{r} k \frac{Q}{r^2} = k \frac{p}{r^3}$$

$p = Ql$ moment dipolowy

Zasada superpozycji - ciągły rozkładu ładunku



Dla ładunku dq, natężenie pola elektrycznego w punkcie P dane jest zgodnie z prawem Coulomba jak dla ładunku punktowego

$$\boxed{d\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

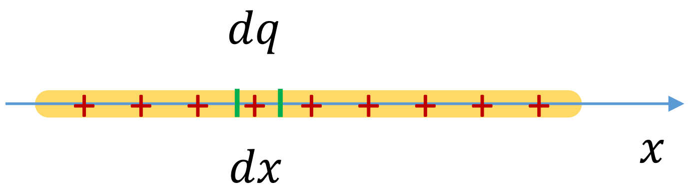
Dla ciągłego rozkładu ładunku pole wypadkowe jest całką:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_Q k\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

Ciągły rozkładu ładunku

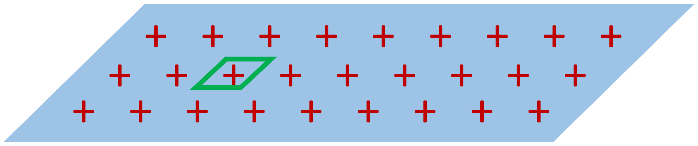
- gęstość liniowa ładunku: λ

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$



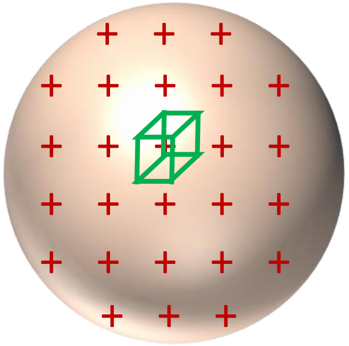
- gęstość powierzchniowa ładunku: σ

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$



- gęstość objętościowa ładunku: ρ

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

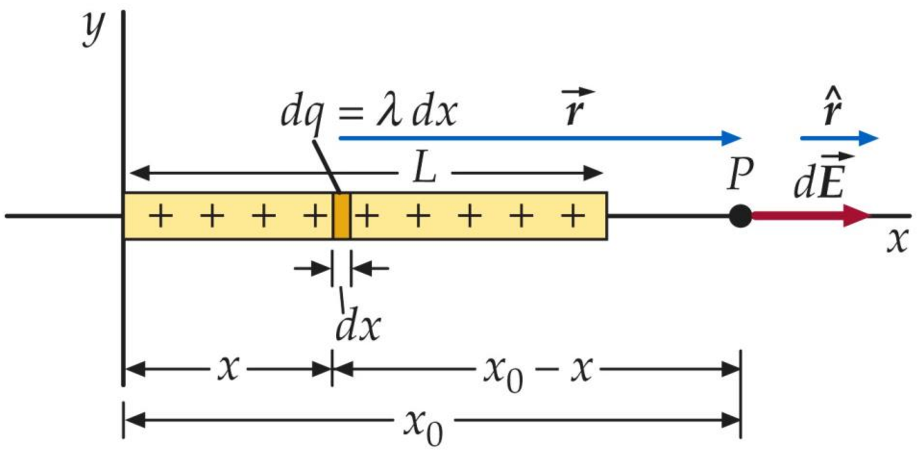


W zależności od rodzaju gęstości ładunku, pole wypadkowe może być całką liniową, powierzchniową lub objętościową:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_V k\frac{\rho dV}{r^2}\hat{r}$$

Zasada superpozycji – naładowany pręt

Policzyć natężenie pola elektrycznego w punkcie P na osi jednorodnie naładowanego cienkiego pręta - liniowy rozkład ładunku



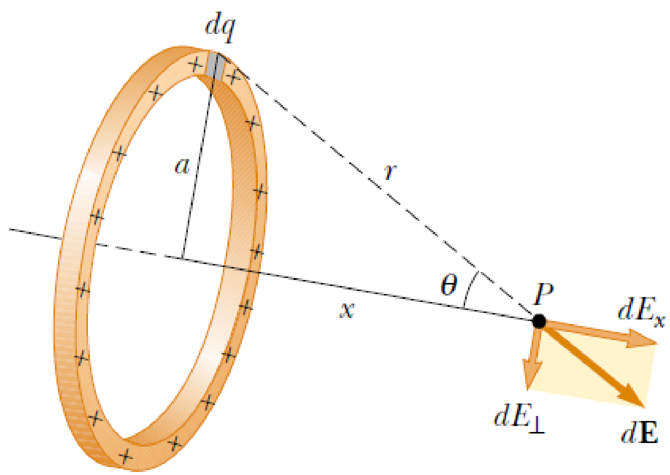
$$dE_x = k\frac{dq}{(x_0 - x)^2}$$

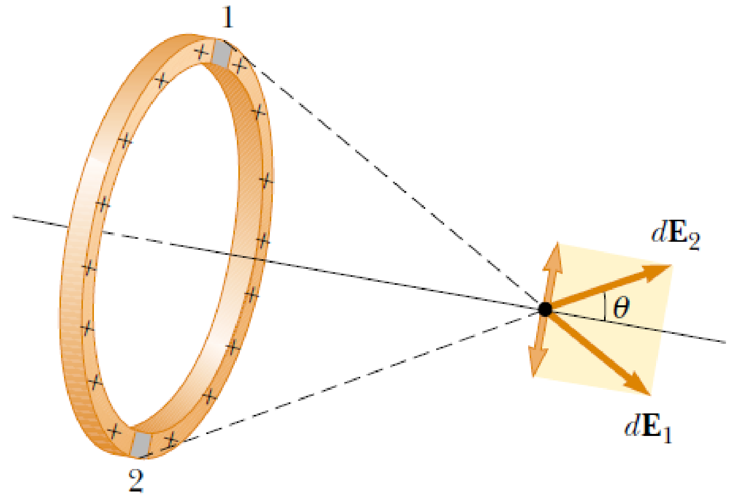
$$dq = \lambda dx$$

$$E = E_x = \int dE_x = \int_0^L k\frac{\lambda}{(x_0 - x)^2}dx = k\frac{\lambda L}{x_0(x_0 - L)}$$

Zasada superpozycji – naładowany pierścień

Policzyć natężenie pola elektrycznego w punkcie P na osi jednorodnie naładowanego cienkiego pierścienia





$$\lambda = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$dE_x = dE\cos\theta$$

$$dE = k\frac{\lambda dl}{r^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$dE_x = k\frac{\lambda dl}{r^2}\frac{x}{r}$$

$$E = E_x = \int dE_x = \int k\frac{\lambda}{r^2}\frac{x}{r}dl$$

$$= k\frac{\lambda x}{r^3}\int dl = k\frac{\lambda x}{r^3}\int 2\pi r = k\frac{Qx}{r^3} = k\frac{Qx}{r^3}$$

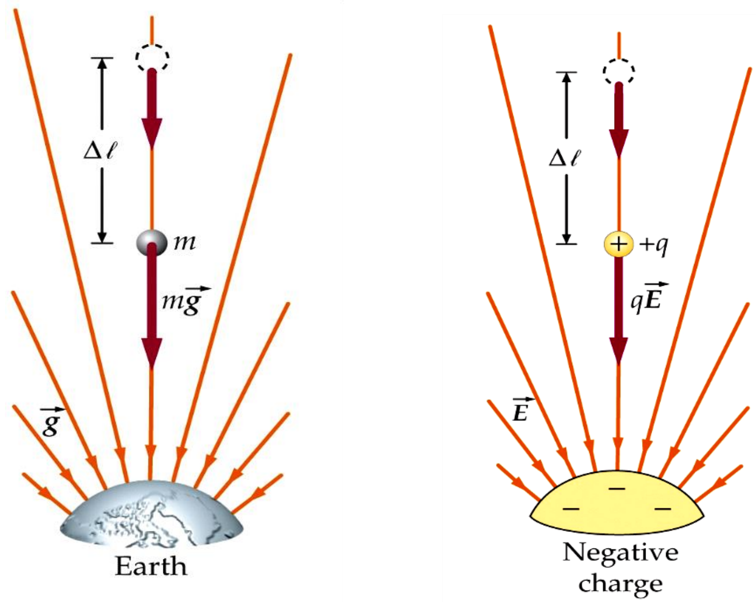
$$E = k\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Natężenie i potencjał pola

✓ Wektor natężenia pola

– istnieje zawsze:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



✓ Potencjał (skalar) – istnieje tylko dla pól zachowawczych (potencjalnych)

$$V = \frac{E_p}{q_0}$$

Potencjał elektryczny definiujemy jako energię potencjalną pola elektrycznego podzieloną przez jednostkowy ładunek

Związek potencjału z natężeniem pola

Dla dowolnej siły zachowawczej, zmiana energii potencjalnej dE_p dana jest wzorem:

$$dE_p = \underbrace{-\vec{F} \circ d\vec{l}}_{\text{praca } dW} = -q_0 \vec{E} \circ d\vec{l}$$

$$dV = -\vec{E} \circ d\vec{l}$$

z definicji potencjału

$$dV = \frac{dE_p}{q_0}$$

$$dE_p = q_0 dV$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \circ d\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V}$$

Napięcie

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \circ d\vec{l} \longrightarrow \Delta V = V_b - V_a = -\frac{W}{q_0}$$

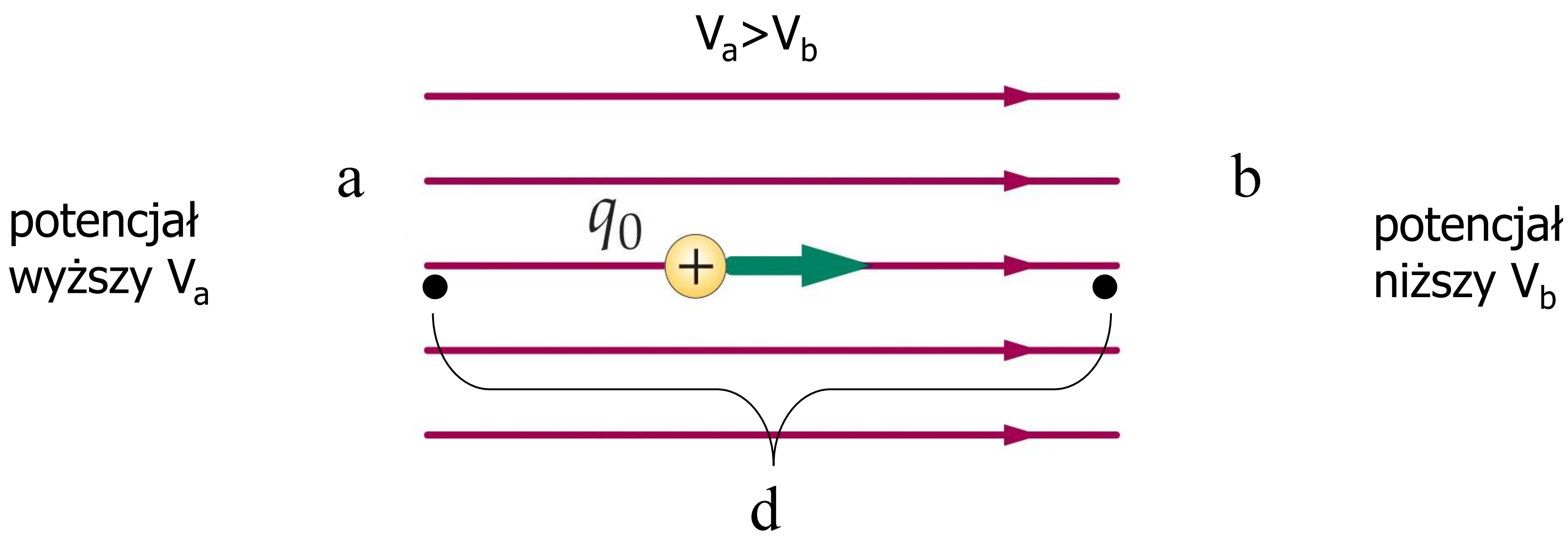
Różnica potencjałów ΔV między dwoma punktami jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy W wykonanej przez siłę elektrostatyczną, przy przesunięciu jednostkowego ładunku z jednego punktu do drugiego.

Różnicę potencjałów nazywamy napięciem U : $U = \Delta V$

Jednostki: $\mathrm{V} = \dfrac{\mathrm{E_p}}{\mathrm{q_o}} \Rightarrow [U] = 1V = \dfrac{J}{C}$

$$[E] = \frac{V}{m}$$

Potencjał pola jednorodnego



$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\int_a^b E dl = -E\int_a^b dl = -E(b-a) = -Ed$$

Potencjał pola ładunku punktowego

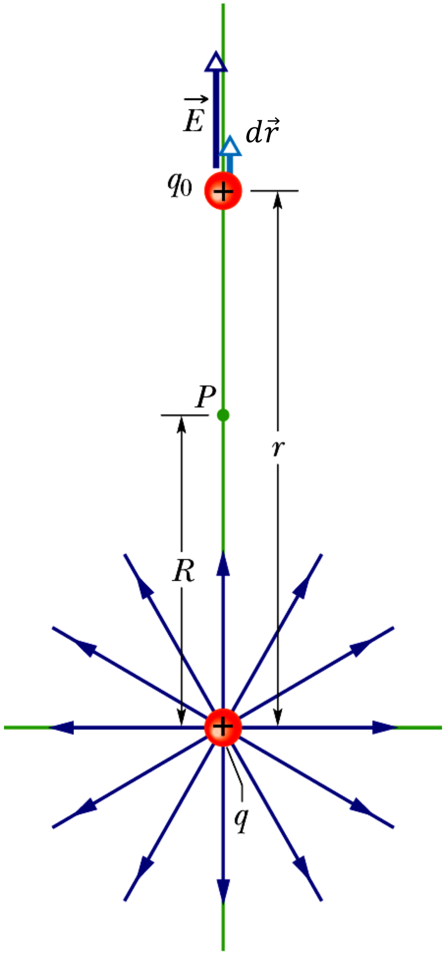
Przesuwamy ładunek próbny q_0 z punktu P do nieskończoności

$$\vec{E} \circ d\vec{r} = E\,dr\cos\theta$$

$$V_p - V_\infty = -\int_\infty^R \vec{E} \circ d\vec{r} = -\int_\infty^R E\,dr$$

Przyjmujemy $V_\infty = 0$ i $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0}{r^2}$

zatem $\boxed{V(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0}{r}}$

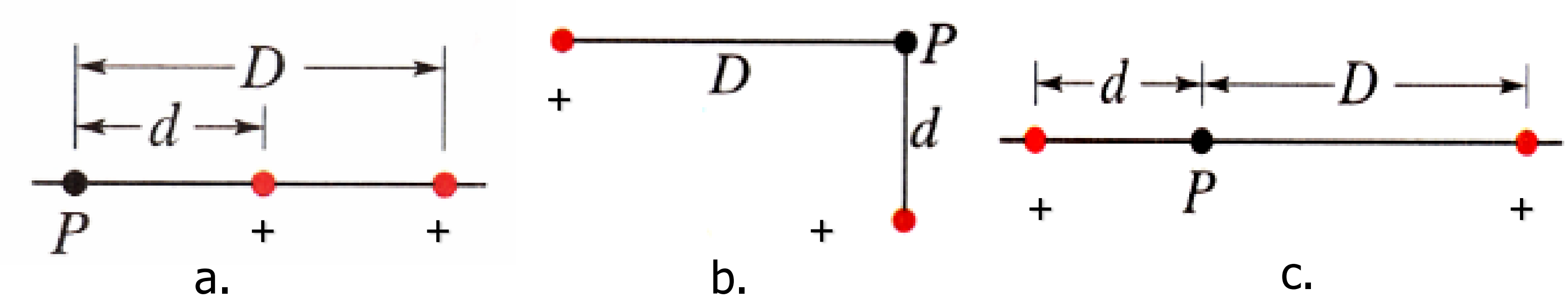


Potencjał dla dyskretnego rozkładu ładunku

Wypadkowy potencjał V układu n ładunków punktowych q_i obliczamy korzystając z zasady superpozycji

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

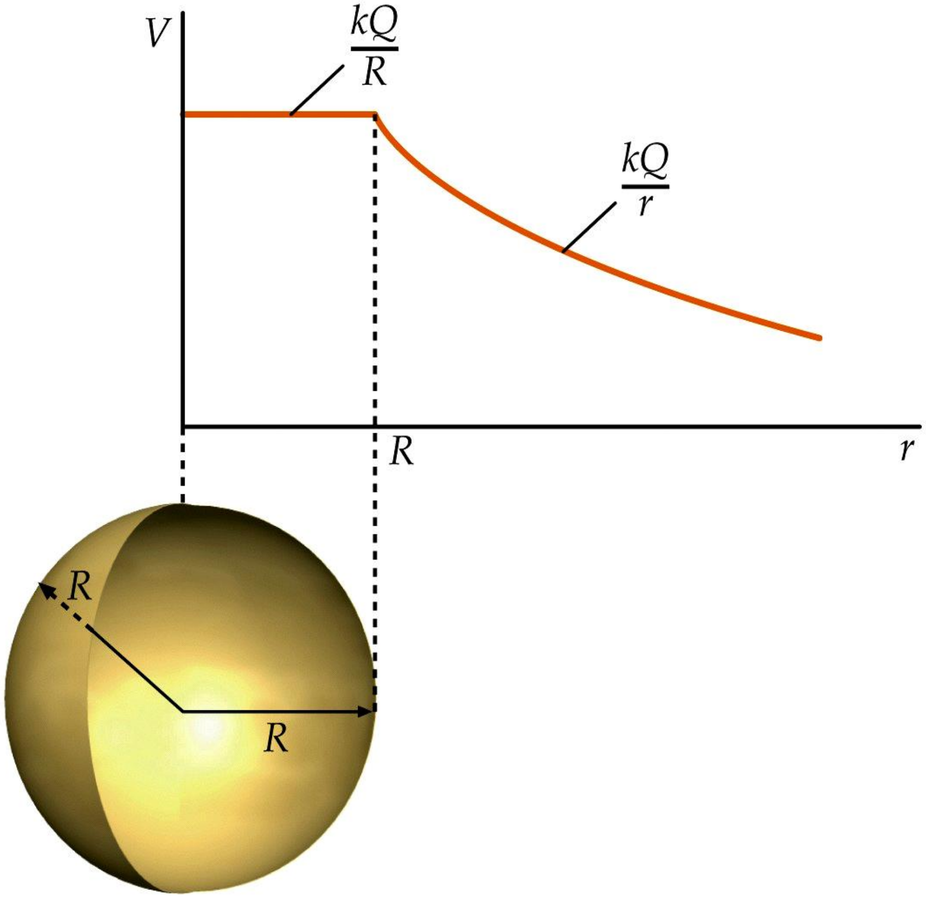
Zadanie Na rysunku przedstawiono trzy układy, zawierające po dwa protony. Uszereguj te układy według wypadkowego potencjału pola, wytworzonego przez protony w punkcie P, zaczynając od największego.



Potencjał ciągłego rozkładu ładunków

Dla naładowanej ładunkiem powierzchniowym Q powłoki sferycznej, gdy r < R jest: E = 0, czyli potencjał V jest wielkością stałą, niezależną od *r*.

Dla r>R, V maleje z odległością r jak 1/r



Zadanie Pokazać, że potencjał dla powłoki sferycznej wykazuje taką zależność V(r) jak na powyższym wykresie

Pojemność

Pojemnością elektryczną nazywamy stosunek ładunku kondensatora do różnicy potencjałów (napięcia) między okładkami.

$C = \frac{Q}{\Delta V}$ $\left[\frac{C}{V}\right] = [F]$ jednostka pojemności $[F]$ (farad)

Powszechnie stosuje się jednak mniejsze jednostki:

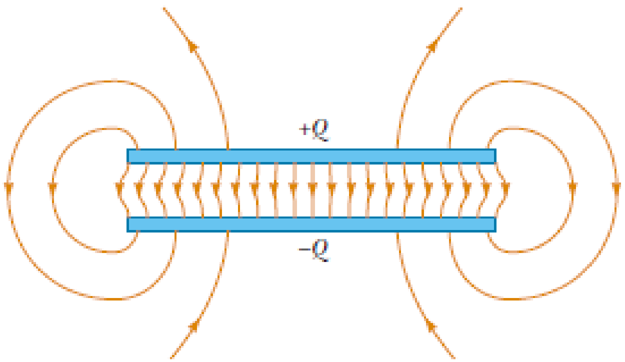
$\mu F, nF, pF$.

Analogia między kondensatorem mającym ładunek q i sztywnym zbiornikiem o objętości V**,** zawierającym n moli gazu doskonałego:

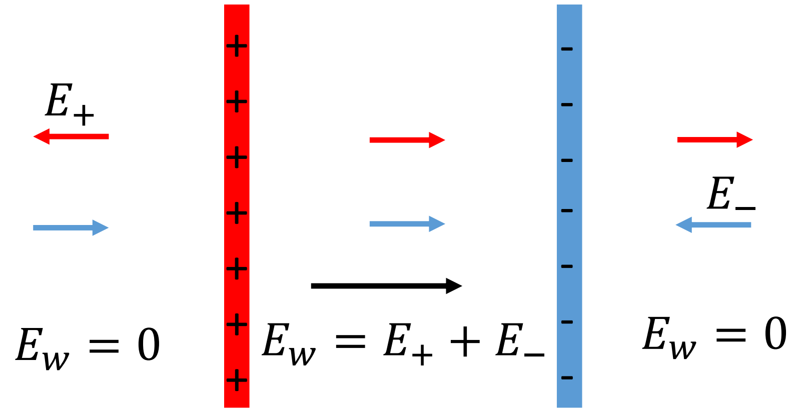
$n = \frac{V_{obj}}{RT} p$ $q = C\Delta V$

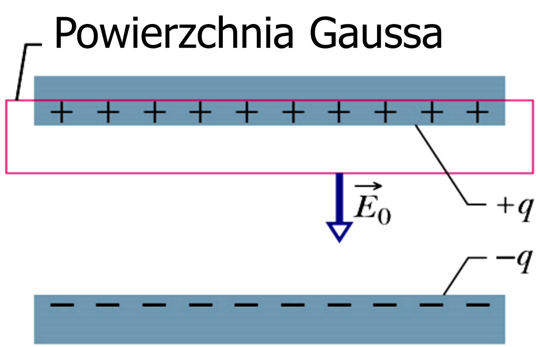
Przy ustalonej temperaturze T, pojemność kondensatora C pełni podobną funkcję jak objętość zbiornika.

Kondensator płaski - pojemność



Inny sposób – superpozycja natężeń:





$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

$$q = E_0 \varepsilon_0 S$$

Wiemy, że dla płaszczyzny: $E_+ = E_- = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \rightarrow E_w = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Pojemność:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{U}$$

$$C = \frac{E\varepsilon_0 S}{Ed}$$

Dla pola jednorodnego:

$$U = E \cdot d$$

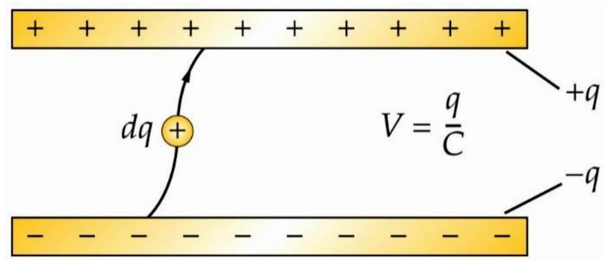
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

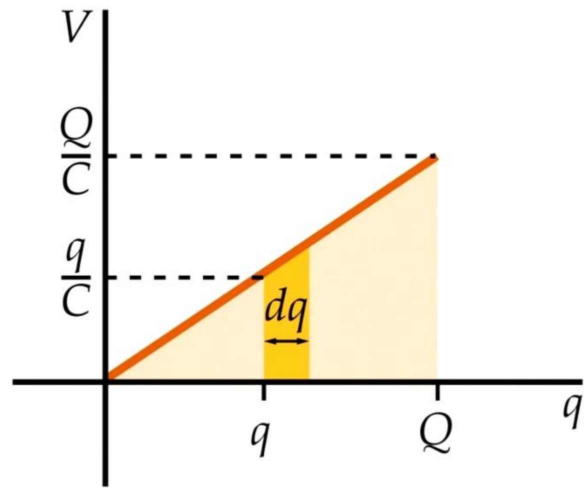
Energia kondensatora

Praca elementarna dW przy przeniesieniu ładunku dq:

$$dW = Udq = \frac{q}{C}dq$$

$$W = \int dW = \int \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$





Praca W wykonana przy ładowaniu kondensatora zostaje zmagazynowana w postaci elektrycznej energii potencjalnej E_E, w polu elektrycznym między okładkami.

$$W = E_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2$$

Gęstość energii U_E jest to energia potencjalna przypadająca na jednostkę objętości

$$q = E_0\varepsilon_0 S \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad U_E = \frac{E_E}{Sd} = \frac{1}{Sd}\frac{1}{2}\frac{d(E_0\varepsilon_0 S)^2}{\varepsilon_0 S}$$

$$\boxed{U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Dielektryki

Dielektryki – ładunki nie mogą się swobodnie przemieszczać ale możliwe są przesunięcia ładunków w skali mikroskopowej.

Umieszczenie dielektryka (izolatora) pomiędzy okładkami kondensatora zwiększa jego pojemność ε_r razy

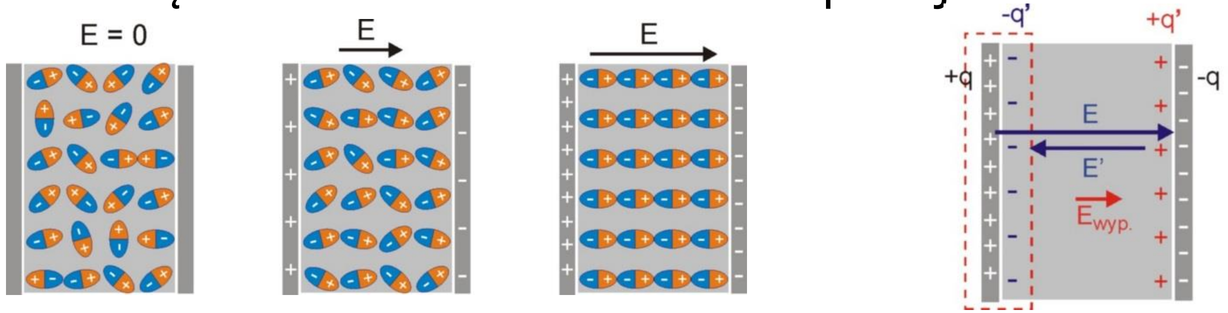
$$\frac{C'}{C} = \varepsilon_r$$

ε_r nazywamy względną przenikalnością elektryczną lub stałą dielektryczną

Materiał	Stała dielektryczna
próżnia	1.0000
powietrze	1.0005
teflon	2.1
polietylen	2.3
papier	3.5
szkło (pyrex)	4.5
porcelana	6.5
woda	78
TiO_2	100

Dielektryki

Dielektryki – ładunki nie mogą się swobodnie przemieszczać ale możliwe są przesunięcia ładunków w skali mikroskopowej.



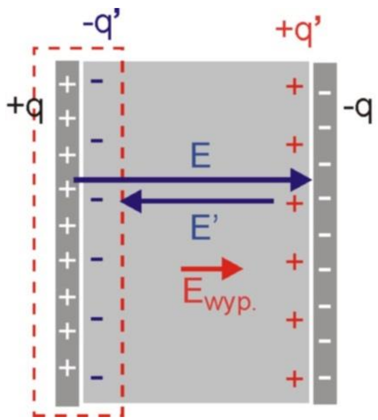
Po umieszczeniu w polu elektrycznym trwałe elektryczne momenty dipolowe dążą do ustawienia zgodnie z kierunkiem pola,

Wewnątrz dielektryka ładunki kompensują się, a jedynie na powierzchni dielektryka pojawia się nieskompensowany ładunek q'

Wyindukowane ładunki wytwarzają pole elektryczne $\boldsymbol{E}'$ przeciwne do pola $\boldsymbol{E}$ pochodzącego od swobodnych ładunków na okładkach kondensatora,

Wypadkowe pole w dielektryku $\boldsymbol{E}_{wyp.}$ (suma wektorowa pól $\boldsymbol{E}'$ i $\boldsymbol{E}$) ma ten sam kierunek co pole $\boldsymbol{E}$ ale mniejszą wartość. Pole związane z ładunkiem polaryzacyjnym q' nosi nazwę polaryzacji elektrycznej .

Dielektryki



Stosujemy prawo Gaussa do powierzchni zaznaczonej linią przerywaną

$$\oint \boldsymbol{E}_{wyp} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q-q'}{\varepsilon_0}$$ pole E jest jednorodne $$E_{wyp} S = \frac{q-q'}{\varepsilon_0}$$

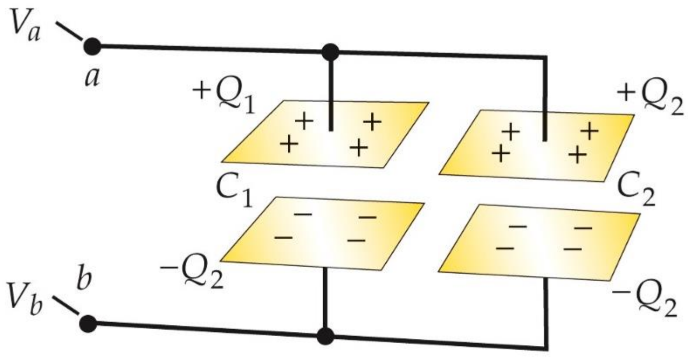
$$E_{wyp} = \frac{q-q'}{\varepsilon_0 S}$$

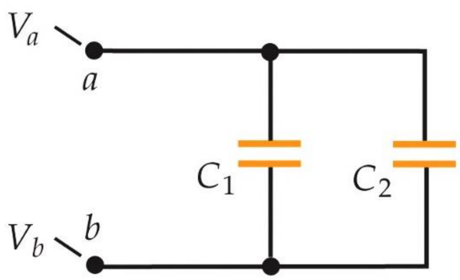
$$C' = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{Ed} = \frac{q}{q-q'}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{q}{q-q'} C \qquad \frac{C'}{C} = \varepsilon_r = \frac{q}{q-q'}$$

wprowadzenie dielektryka zwiększa pojemność i zmniejsza pole elektryczne ε_r razy

prawo Gaussa (dla kondensatora z dielektrykiem) $$\oint \varepsilon_r \boldsymbol{E} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Kondensatory – połączenie równoległe





Przy połączeniu równoległym równoległego różnica potencjałów między okładkami wszystkich kondensatorów jest taka sama (połączone okładki stanowią jeden przewodnik)

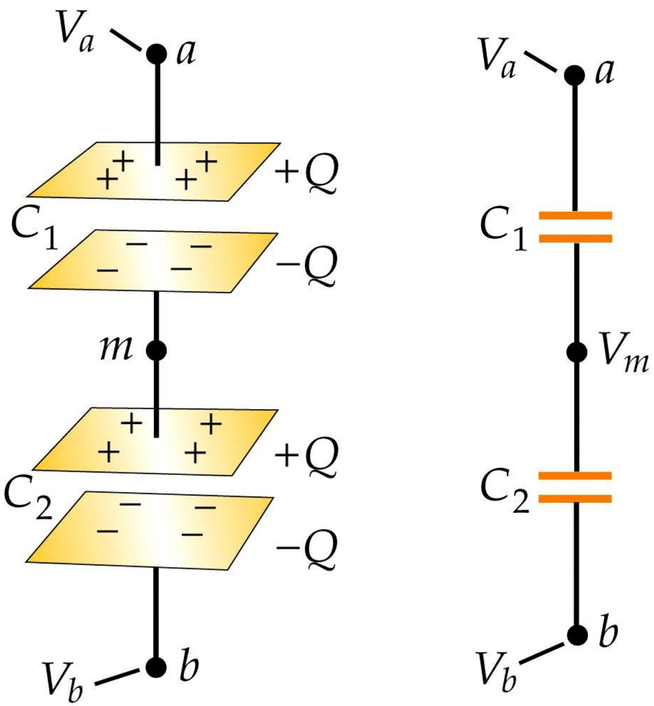
$$\Delta V = U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = C_1 + C_2$$

Pojemność zastępcza kondensatorów równoległych: $\boxed{C = C_1 + C_2}$

Kondensatory – połączenie szeregowe



Dla połączenia szeregowego ładunek wprowadzony na okładki zewnętrzne wywołuje równomierny rozkład (rozdzielenie) ładunku pomiędzy okładkami wewnętrznymi

$$Q = \Delta V_1 C_1 = \Delta V_2 C_2$$

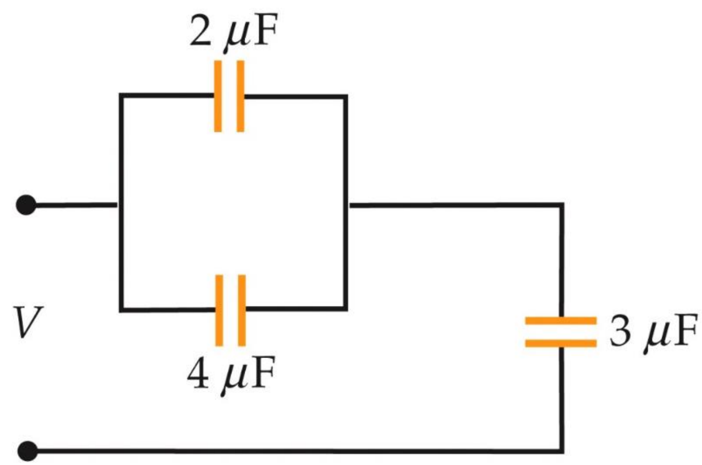
$$Q = U_1 C_1 = U_2 C_2$$

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Pojemność zastępcza kondensatorów szeregowych: $\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

Zadanie

Znajdź pojemność zastępczą układu kondensatorów przedstawionych na rysunku



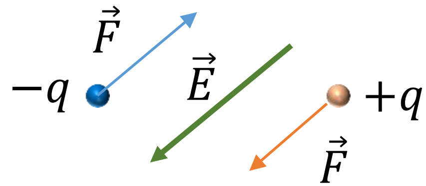
Podsumowanie

- Elektrostatyka opisuje pola statyczne utworzone przez ładunki elektryczne w spoczynku.
- Pole elektrostatyczne jest zachowawcze (potencjalne). Pole to jest charakteryzowane przez wektor natężenia pola i potencjał.
- Wartość natężenia pola pochodzącego od konkretnych rozkładów ładunku obliczamy bądź z zasady superpozycji i prawa Coulomba bądź z prawa Gaussa.
- Kondensator jest urządzeniem, w którym magazynowana jest potencjalna energia elektrostatyczna. Gęstość energii zmagazynowanej jest proporcjonalna do kwadratu pola E.
- Prawo Gaussa w postaci całkowej lub różniczkowej stanowi jedno z równań Maxwella.

Pole i potencjał

Siła działająca na ładunek q umieszczony w polu elektrycznym:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}} \quad \text{[N]}$$



Pole elektryczne jest przeciwne do gradientu potencjału:

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V} \quad \text{[V/m]}$$

Potencjał to energia potencjalna ładunku w polu elektrycznym, dzielona przez ten ładunek:

$$\boxed{V = \frac{-\int_{\infty}^{R} \vec{F} \circ d\vec{r}}{q} = \frac{-\int_{\infty}^{R} q\vec{E} \circ d\vec{r}}{q} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \circ d\vec{r}} \qquad \text{[V]}$$

Zmiana energia potencjalnej ładunku to napięcie mnożone przez ten ładunek:

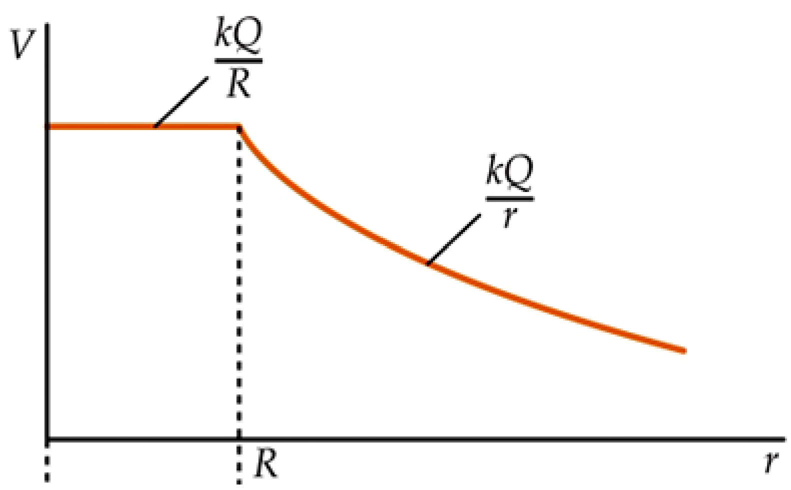
$$\boxed{\Delta E_p = q(V_2 - V_1) = qU} \quad \text{[J] (1 eV = } 9.6 \cdot 10^{-19} \text{ J)}$$

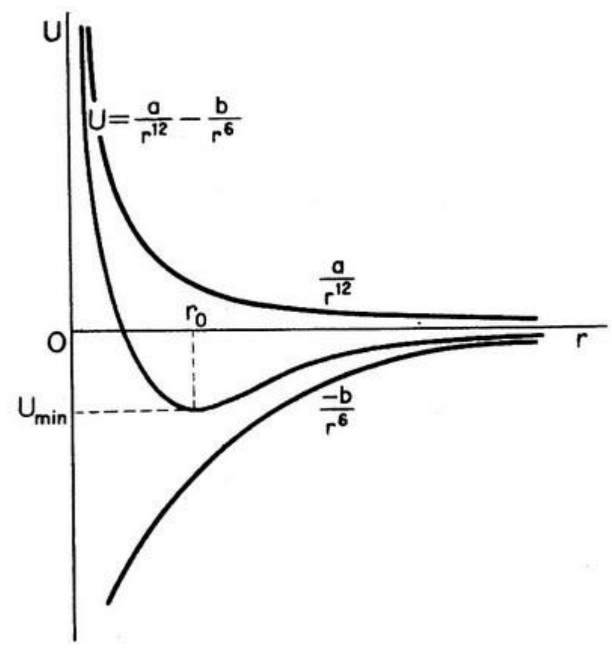
Energia, potencjał, gradient, równowaga

Zależność energii (lub potencjału) od odległości determinuje siły (pola) działające na ciało w danym punkcie przestrzeni.

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, Ep}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V}$$





Wewnątrz kuli potencjał jest stały:

pole elektryczne równe zero

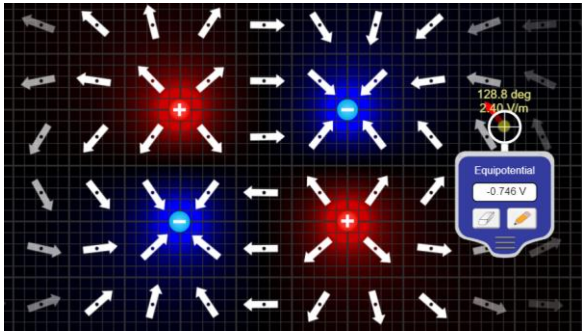
Potencjał Lenarda – Jonesa:

stan równowagi trwałej dla r_0

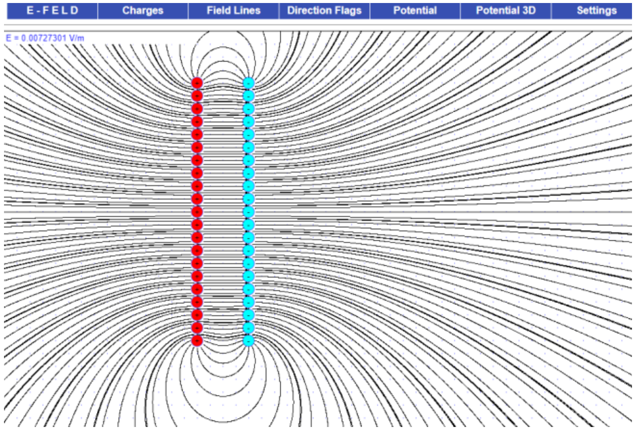
Superpozycja pól i potecjałów

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \qquad V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_all.html

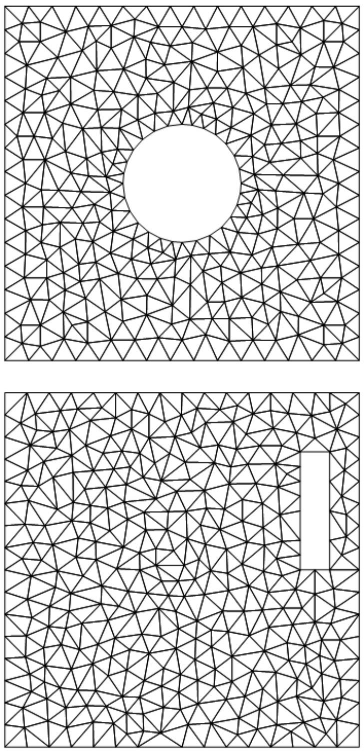


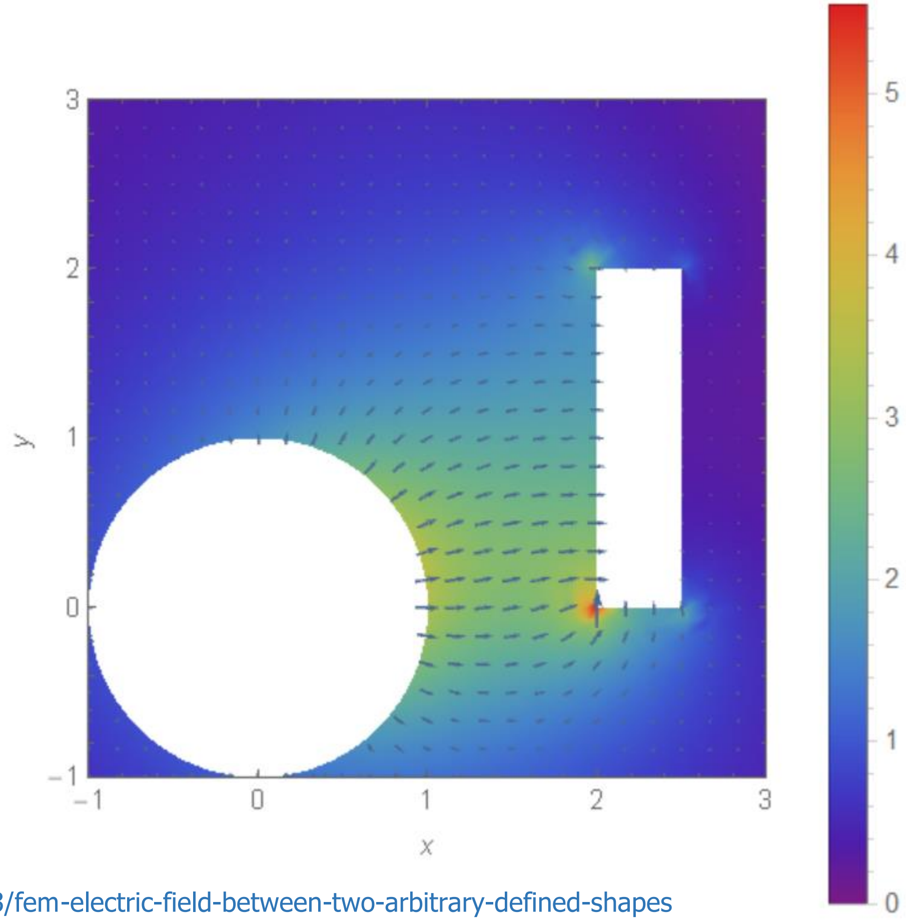
https://www.didaktikonline.physik.uni-muenchen.de/programme/e_feld/E_Feld_min_en.html



Ciągły rozkładu ładunku na przewodniku

Symulacja pola i potencjału metodą elementów skończonych





https://mathematica.stackexchange.com/questions/218683/fem-electric-field-between-two-arbitrary-defined-shapes

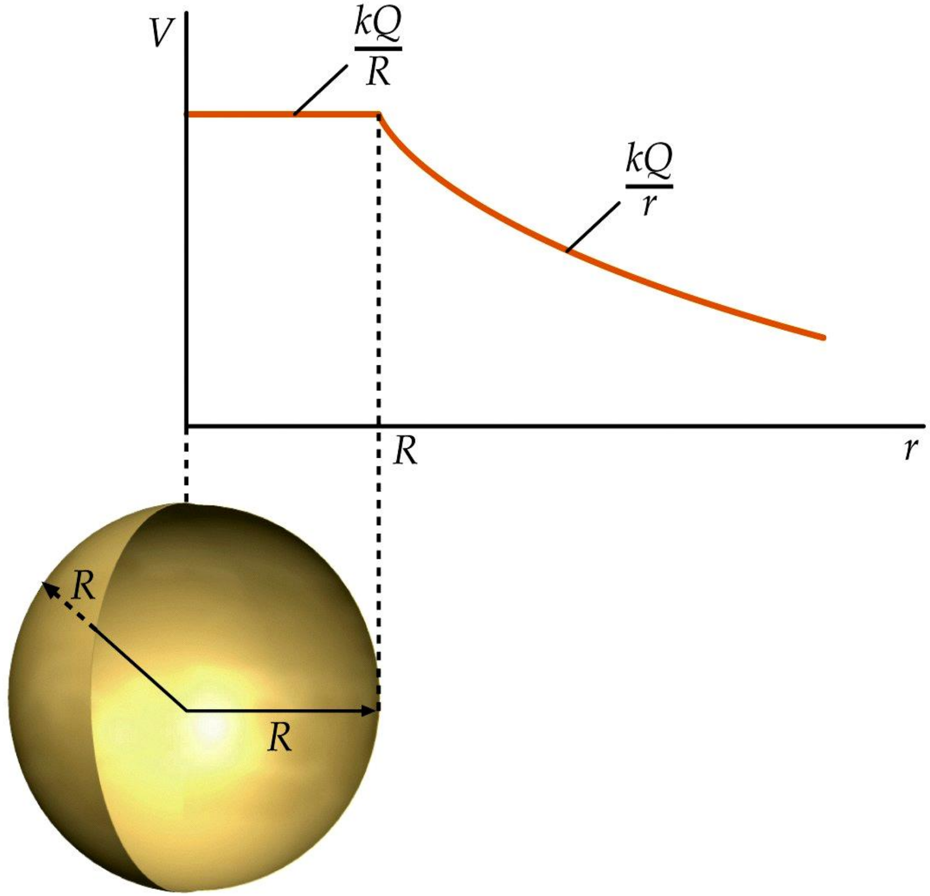
Podsumowanie

- Wektor pola elektrycznego wynika z superpozycji pól elektrycznych od poszczególnych ładunków. Potencjał w danym punkcie jest sumą potencjałów pochodzących od poszczególnych ładunków.
- Pole elektrostatyczne związane jest ze zmianą potencjału.
- Stały potencjał (stała energia potencjalna) oznacza zerowe pole elektryczne (brak siły wypadkowej).
- Kształt zależności potencjału (lub energii potencjalnej) od położenia w przestrzeni determinuje zachowanie się obiektu w tym polu.
- Dla obliczeń numerycznych (FEM, FDM) wygodnie jest używać potencjału (który jest skalarem) i liczyć różnicę potencjałów w celu uzyskania wektora pola (lub siły).

Zadanie

Dla naładowanej ładunkiem powierzchniowym Q powłoki sferycznej, gdy $r < R$ jest: $E = 0$, czyli potencjał V jest wielkością stałą, niezależną od *r*.

Dla $r>R$, V maleje z odległością r jak $1/r$



Zadanie Pokazać, że potencjał dla powłoki sferycznej wykazuje taką zależność V(r) jak na powyższym wykresie