Wektory

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak

Wielkości fizyczne

Wielkości skalarne:

Wielkości wektorowe:

długość

przyspieszenie

strumień pola magnetycznego

pęd

czas

siła

masa

praca

prędkość

temperatura

natężenie pola elektrycznego

przemieszczenie

Pojęcie wektora

Cechy wektora:

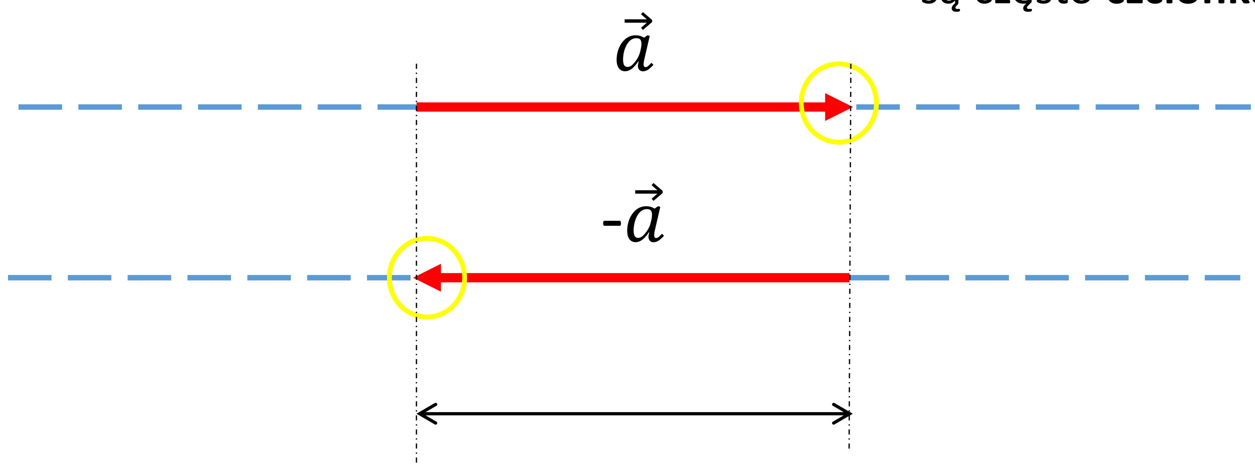
- kierunek
- zwrot
- wartość (długość)

Zapis

wektor: $\vec{a}$, $\boldsymbol{a}$

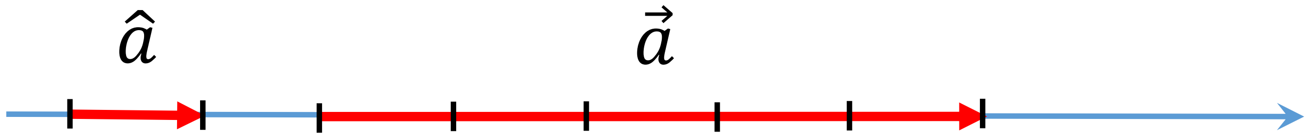
wartość: $|\vec{a}|$, a

wektory w druku wyróżnione są często **czcionką pogrubioną**



$$|\vec{a}| = |-\vec{a}| = a$$

Długość wektora, wersor



$$\vec{a} = 5\hat{a}$$

$$|\vec{a}| = 5|\hat{a}| = 5$$

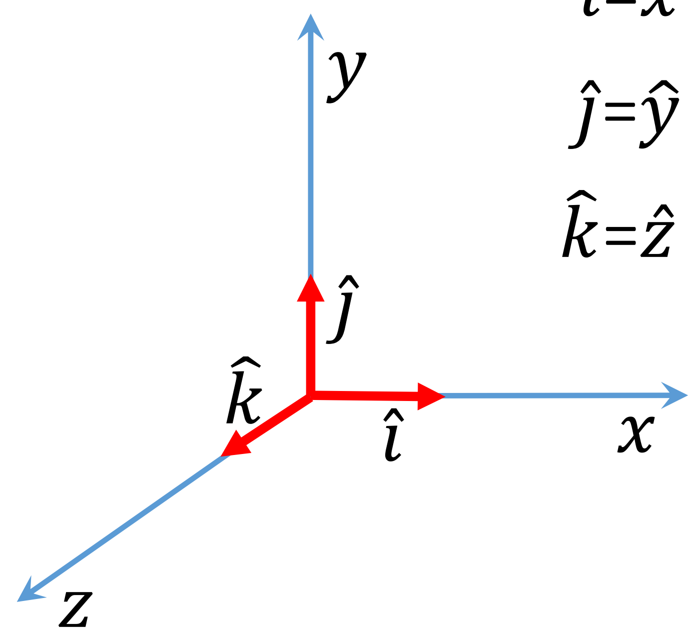
$\hat{\imath} = \hat{x}$

$\hat{\jmath} = \hat{y}$

$\hat{k} = \hat{z}$

Wersor to wektor jednostkowy:

$$|\hat{a}| = 1$$

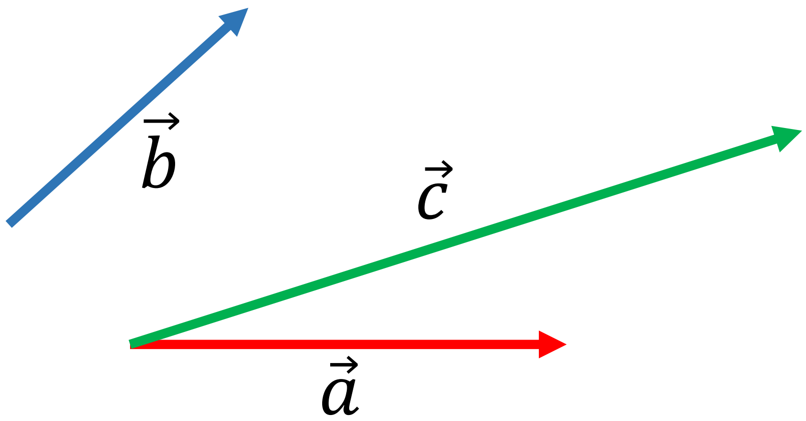


Działania na wektorach

- Dodawanie
- Odejmowanie
- Mnożenie
    - Iloczyn wektora przez liczbę
    - Iloczyn skalarny dwóch wektorów
    - Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

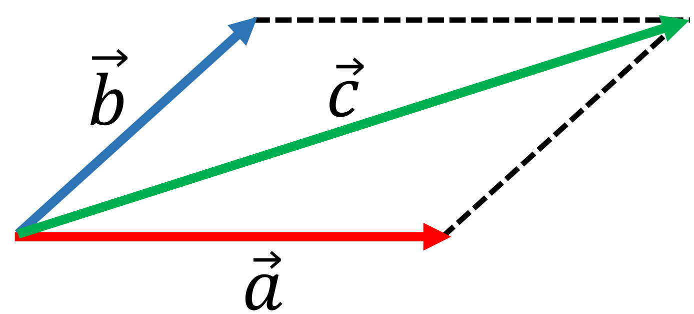
Nie ma dzielenia wektora przez wektor!

Dodawanie wektorów



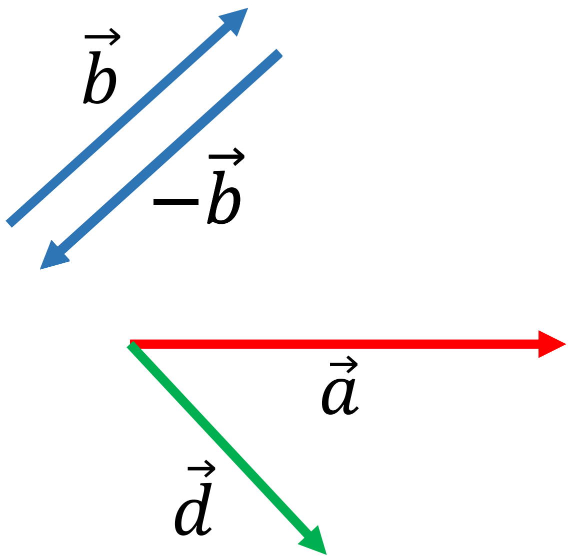
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Reguła równoległoboku

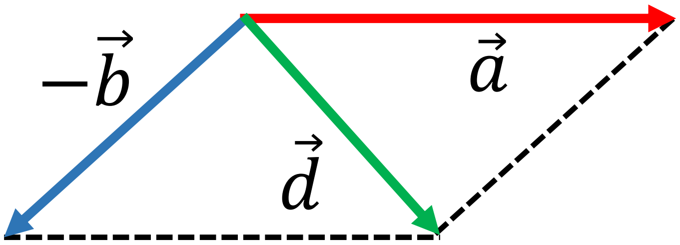


Odejmowanie wektorów

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b}) = \vec{d}$$

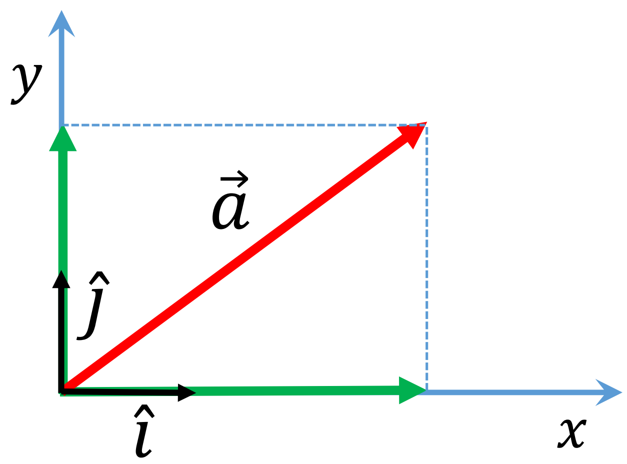


Reguła równoległoboku



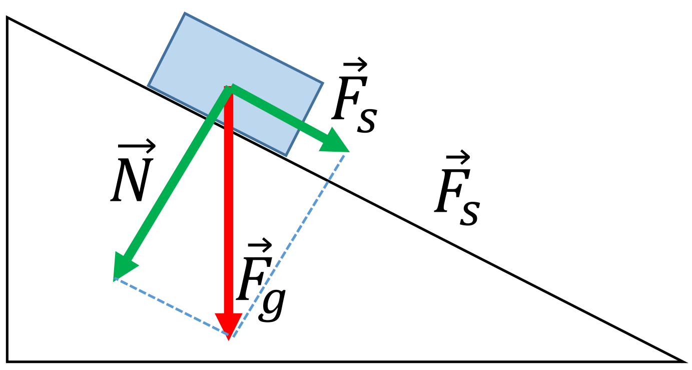
Rozkład wektora na składowe

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$$



Przykład:
rozkład sił na równi

$$\vec{F}_g = \vec{N} + \vec{F}_s$$



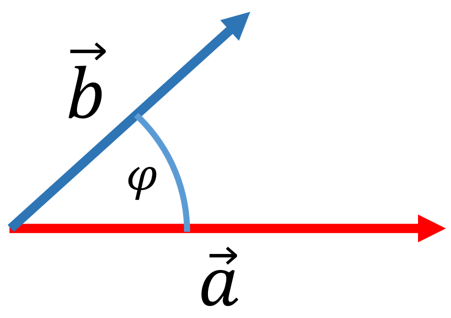
$\vec{F}_g$ – siła grawitacji

$\vec{N}$ - siła nacisku

$\vec{F}_s$ - siła ściągająca

Iloczyn skalarny

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$$



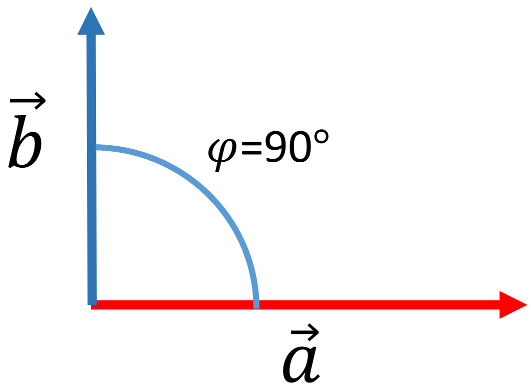
Wynik mnożenia skalarnego wektorów jest liczbą:

- dodatnią
- ujemną
- zero

Iloczyn skalarny jest przemienny

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

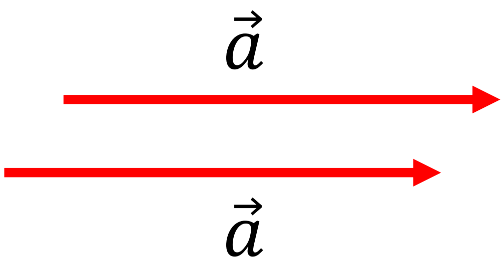
Iloczyn skalarny



$$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(90°) = 0$$

Jeżeli wektory są prostopadłe to ich iloczyn skalarny jest równy 0

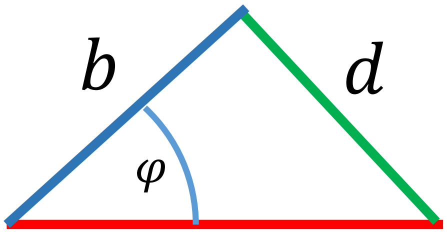
W ten sposób można sprawdzić prostopadłość wektorów



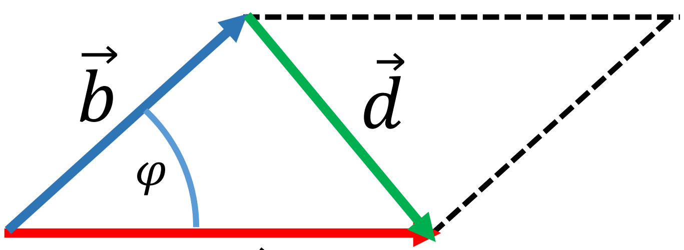
$$\vec{a} \circ \vec{a} = a \cdot a \cdot \cos(0°) = a \cdot a \cdot 1 = a^2$$

$$a = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

Twierdzenie cosinusów – iloczyn skalarny



$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi$$



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$$

$$\vec{d} \circ \vec{d} = d^2$$

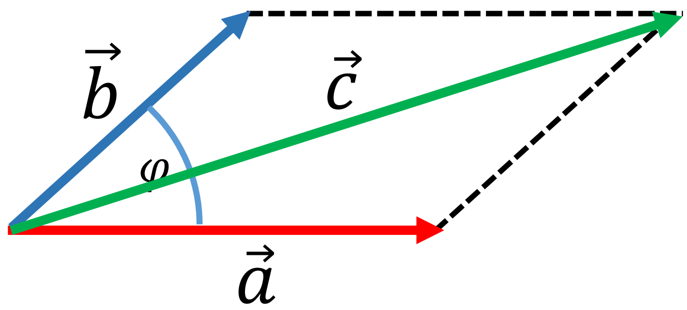
$$\vec{d} \circ \vec{d} = (\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) =$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b} =$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi + b^2$$

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi}$$

Twierdzenie cosinusów – iloczyn skalarny



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{c} \circ \vec{c} = c^2$$

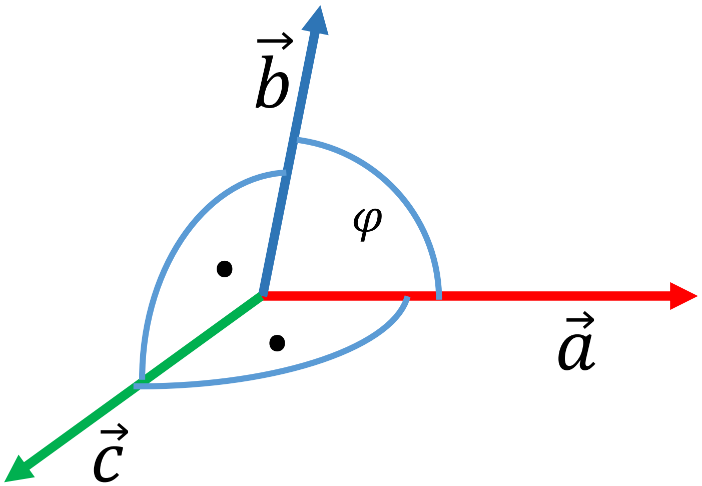
$$\vec{c} \circ \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) =$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} + \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b} =$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi + b^2$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi}$$

Iloczyn wektorowy

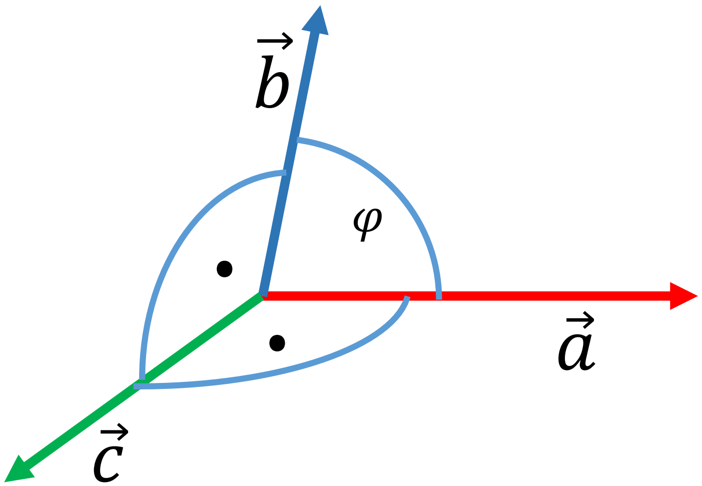


$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Wynik działania jest wektorem.

Należy zatem podać nie tyko **wartość** ale również **kierunek** i **zwrot** wektora **!!!**

Iloczyn wektorowy – kierunek

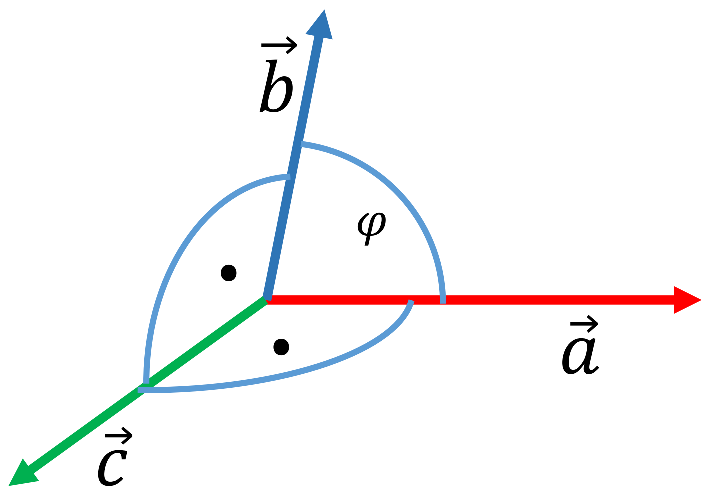


$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

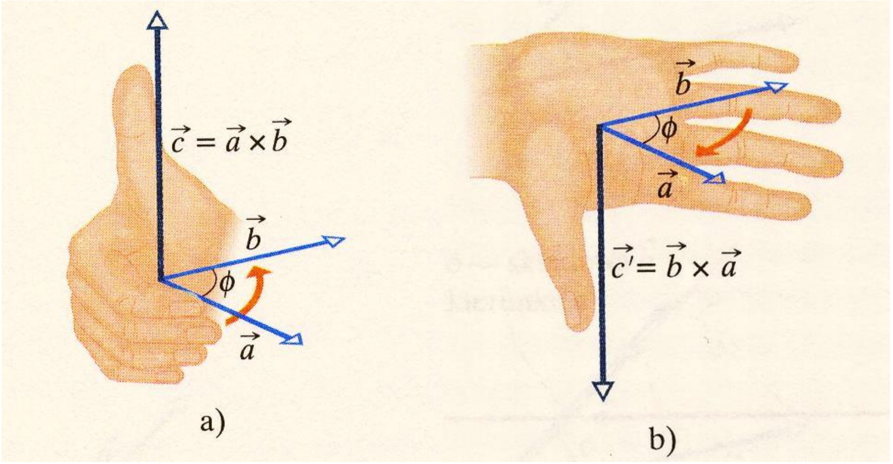
$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad \text{i} \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

Kierunek wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Iloczyn wektorowy – zwrot

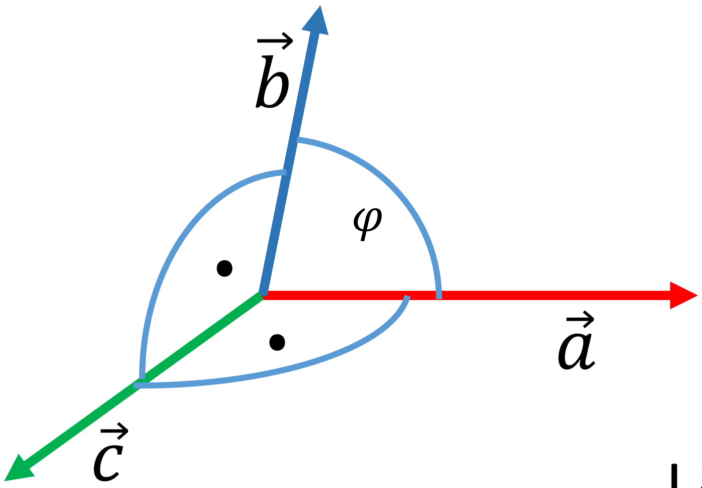


$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$



Kierunek wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ określa reguła śruby prawoskrętnej lub reguła prawej ręki.

Iloczyn wektorowy – wartość



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

Długość wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ to liczba.

Algebra wektorów

Rozdzielność iloczynu skalarnego i wektorowego względem dodawania (odejmowania)

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} \qquad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \circ \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{c} \qquad \vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}$$

Przykład:

Obliczyć wektor $\vec{C}$ z równania:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{C}\left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^{\circ} \vec{b}\right] = 0$$

Przykład 1

$$2\vec{a} \; - 3\vec{b} + \vec{C}[(\vec{a} + \vec{b})\circ \vec{b}] = 0$$

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$2\vec{a} \; - 3\vec{b} + \vec{C}[\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{b}] = 0$$ ale: $$\vec{b} \circ \vec{b} = b^2$$

$$2\vec{a} \; - 3\vec{b} + \vec{C}[\vec{a} \circ \vec{b} + b^2] = 0$$

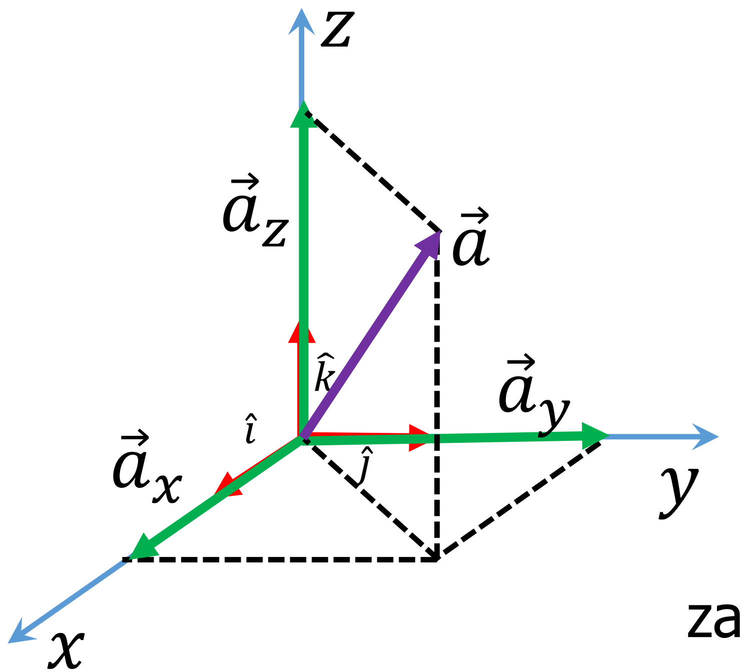
dodając i odejmując stronami:

$$\vec{C}\left[\vec{a} \circ \vec{b} + b^2\right] = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

Można podzielić przez wyrażenie w nawiasie upewniwszy się, że jest liczbą:

$$\vec{C} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b}}{\left[\vec{a} \circ \vec{b} + b^2\right]}$$

Wektor w układzie kartezjańskim



$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

zależności między wersorami:

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\imath} \times \hat{\imath} = 0$$

$$\hat{\imath} \circ \hat{\jmath} = 0 \qquad \hat{\imath} \circ \hat{\imath} = 1$$

Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$

- Dodawanie

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x+b_x)\hat{\imath} + (a_y+b_y)\hat{\jmath} + (a_z+b_z)\hat{k}$$

- Odejmowanie

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x-b_x)\hat{\imath} + (a_y-b_y)\hat{\jmath} + (a_z-b_z)\hat{k}$$

- Mnożenie przez liczbę

$$5\vec{a} = 5a_x\hat{\imath} + 5a_y\hat{\jmath} + 5a_z\hat{k}$$

Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

- Iloczyn skalarny

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \qquad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + \vec{a}_z\hat{k}) \circ (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) =$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \circ \vec{b} = {} & a_x b_x\, \hat{\imath} \circ \hat{\imath} + \cancel{a_x b_y\, \hat{\imath} \circ \hat{\jmath}} + \cancel{a_x b_z\, \hat{\imath} \circ \hat{k}} + \\ & \cancel{a_y b_x\, \hat{\jmath} \circ \hat{\imath}} + a_y b_y\, \hat{\jmath} \circ \hat{\jmath} + \cancel{a_y b_z\, \hat{\jmath} \circ \hat{k}} + \\ & \cancel{a_z b_x\, \hat{k} \circ \hat{\imath}} + \cancel{a_z b_y\, \hat{k} \circ \hat{\jmath}} + a_z b_z\, \hat{k} \circ \hat{k} =\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi}$$

$$\hat{\imath} \circ \hat{\jmath} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \qquad \hat{\imath} \circ \hat{\imath} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

- Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + \vec{a}_z\hat{k}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) =$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = {} & \cancel{a_x b_x\, \hat{\imath} \times \hat{\imath}} + a_x b_y\, \hat{\imath} \times \hat{\jmath} + a_x b_z\, \hat{\imath} \times \hat{k} + \\ & a_y b_x\, \hat{\jmath} \times \hat{\imath} + \cancel{a_y b_y\, \hat{\jmath} \times \hat{\jmath}} + a_y b_z\, \hat{\jmath} \times \hat{k} + \\ & a_z b_x\, \hat{k} \times \hat{\imath} + a_z b_y\, \hat{k} \times \hat{\jmath} + \cancel{a_z b_z\, \hat{k} \times \hat{k}} =\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}}$$

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi}$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = 0 \qquad \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$$

Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

- Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \qquad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

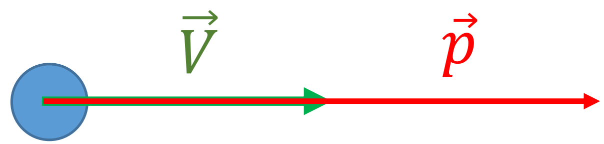
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z\hat{\imath} + a_x b_y\hat{k} + a_z b_x\hat{\jmath}$$

$$\begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \end{matrix} \qquad - a_y b_x\hat{k} - a_z b_y\hat{\imath} - a_x b_z\hat{\jmath}$$

Rachunek wektorowy w fizyce - przykład

<u>Mnożenie wektora przez liczbę</u>:

Pęd: $\vec{p} = m\vec{V}$



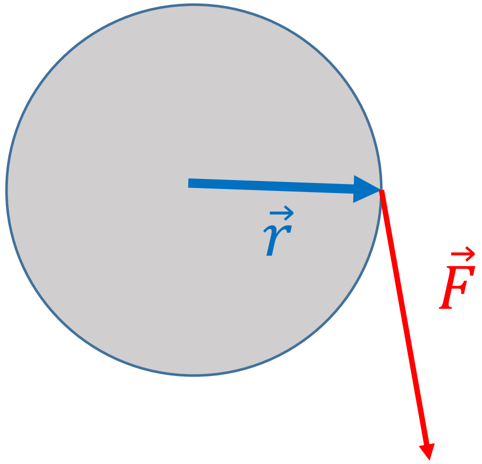
Wektor pędu równoległy do wektora prędkośći: $\vec{p} \parallel \vec{V}$

Rachunek wektorowy w fizyce - przykład

<u>Iloczyn skalarny</u>:

Praca $W = F \cdot S \cdot cos\varphi = \vec{F} \circ \vec{S}$

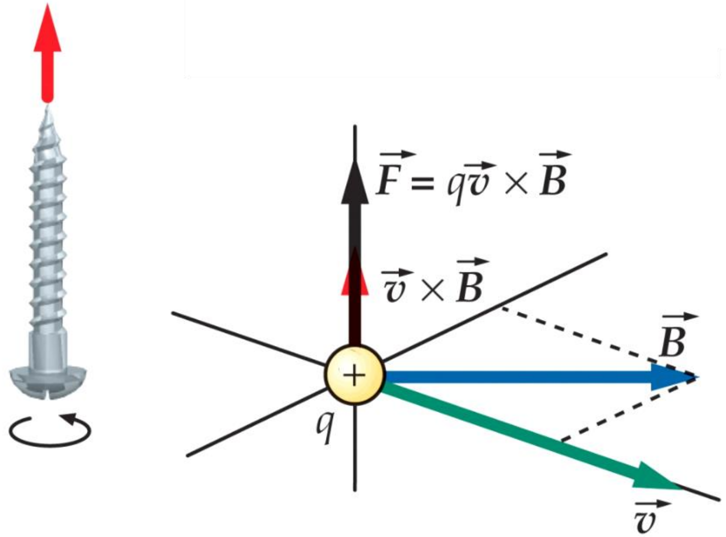
<u>Iloczyn wektorowy</u>:

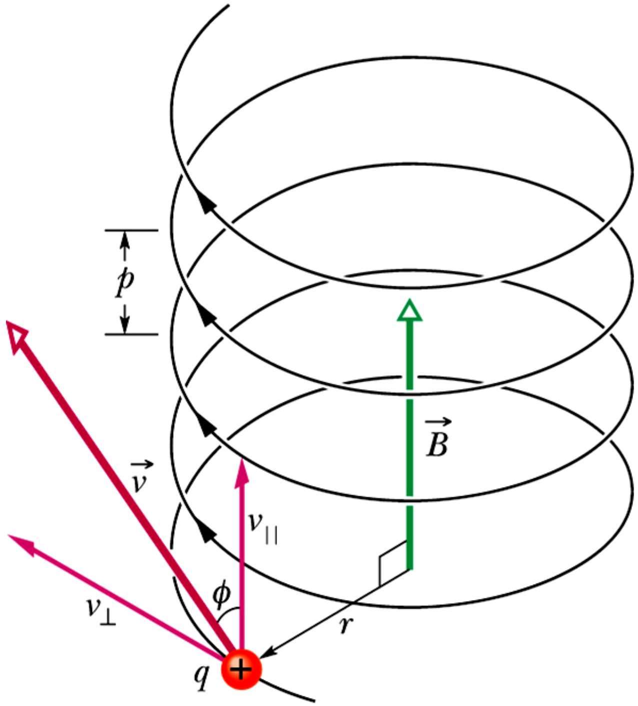


Moment siły $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Rachunek wektorowy w fizyce - przykład

Siła Lorentza – siła działająca na ładunek q poruszający się w polu magnetycznym o wektorze indukcji B:





siła dośrodkowa zakrzywiająca tor:

$$\vec{F}_L = q\vec{V} \times \vec{B}$$

$$F_L = qV_\perp B = \frac{mV^2}{r}$$

Rachunek wektorowy w fizyce - zadanie

Stałe siły $\mathbf{F_1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ oraz $\mathbf{F_2} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (gdzie **i, j, k** są wersorami układu) działają równocześnie na cząstkę przesuwając ją z punktu A (0, 4, 0) do B (2, 3, 4).

Oblicz:

a) wektor przesunięcia;

b) wypadkową siłę;

c) kąt między siłami składowymi;

d) pracę wykonaną przy przesunięciu cząstki;

c) moment siły wypadkowej działającej na cząstkę w punkcie B względem środka układu.

Przykład

Wykazać, że pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej poruszającej się w nim, naładowanej cząsteczki

$$E_K = \frac{m}{2}\vec{V}\circ\vec{V}$$

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\vec{V}\circ\vec{V} = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\circ\vec{V} + \vec{V}\circ\frac{d\vec{V}}{dt}\right) = \frac{m}{2}2\frac{d\vec{V}}{dt}\circ\vec{V}$$

$$\frac{dE_K}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt}\circ\vec{V}$$ ale $m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$ gdzie $\vec{F} = q(\vec{V}\times\vec{B})$

$$\frac{dE_K}{dt} = \vec{F}\circ\vec{V} = q\underbrace{\left(\vec{V}\times\vec{B}\right)\circ\vec{V}}_{0}$$

$$\boxed{E_K = const}$$

Rachunek wektorowy - podsumowanie

<table>
<tr><th>Działanie</th><th>Wynik</th><th>Metoda postępowania</th><th>Zastosowanie</th></tr>
<tr><td>dodawanie
$\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$</td><td>wektor</td><td rowspan="3">reguła równoległo-boku</td><td>wypadkowe przemieszczenie
wypadkowa siła</td></tr>
<tr><td>odejmowanie
$\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$</td><td>wektor</td><td>algebra wektorów, dowodzenie twierdzeń</td></tr>
<tr><td>rozkład wektora</td><td>wektory składowe</td><td>równia pochyła, rzut ukośny, itp.</td></tr>
</table>

Rachunek wektorowy - podsumowanie

Działanie	Wynik	Definicja	Wzór w układzie kartezj.	W mate-matyce	W fizyce
iloczyn skalarny $\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}}$	skalar	$\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}} = a\ b \cos\varphi$	$\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	prosto-padłość wektorów	praca, energia np. kinetyczna
iloczyn wektorowy $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$	wektor	$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = a\ b \sin\varphi$ 1. kierunek 2. zwrot 3. wartość	$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	równo-ległość wektorów	moment pędu, moment siły, siła Lorentza
mnożenie wektora przez liczbę k	wektor	$k \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}}$ 1. kierunek 2. zwrot 3. wartość	$ka_x = b_x$ $ka_y = b_y$ $ka_z = b_z$	równo-ległość wektorów	pęd, II zasada dynamiki