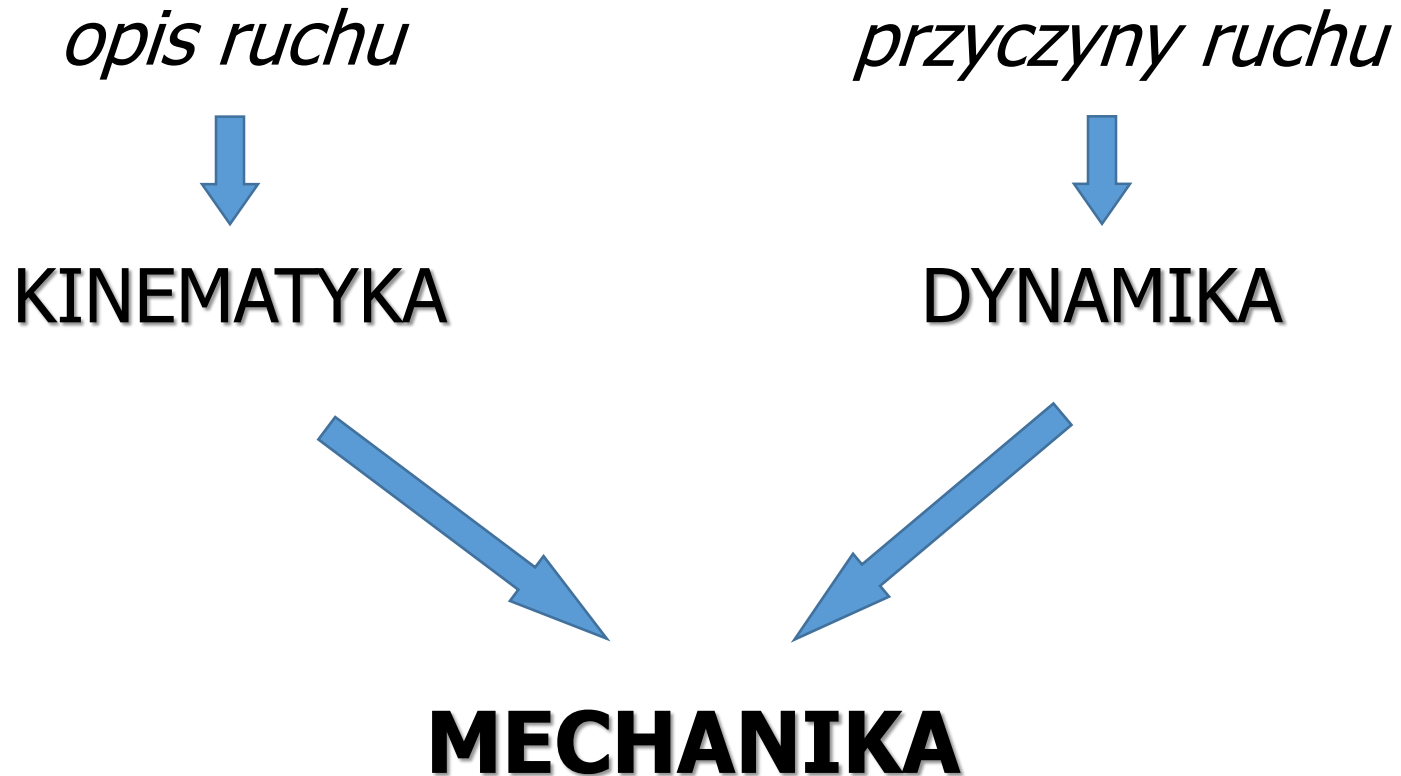


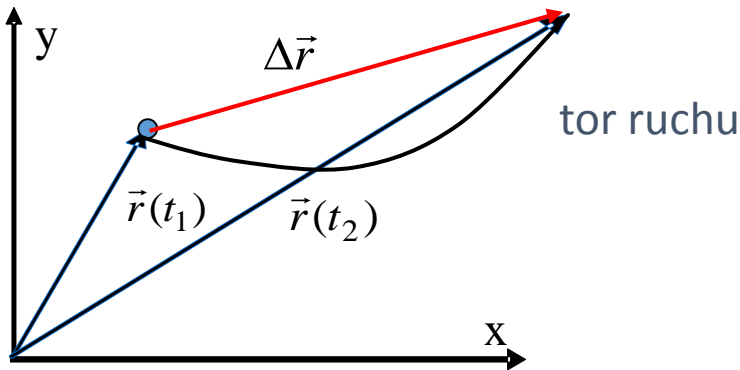


# Kinematyka

Dr hab. inż. Jarosław Kanak  
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321  
[kanak@agh.edu.pl](mailto:kanak@agh.edu.pl)  
<http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak>



# Podstawowe pojęcia ruchu krzywoliniowego



przemieszczenie

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

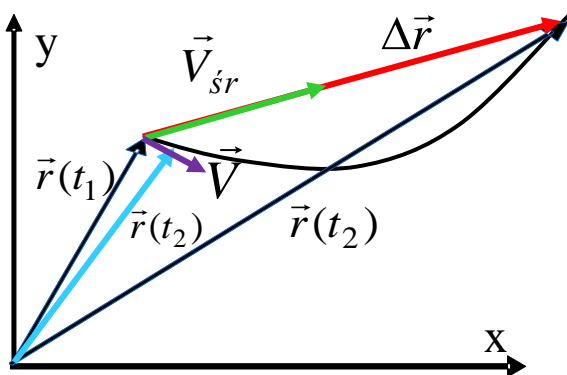
prędkość średnia

$$\vec{V}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

prędkość chwilowa

gdy  $t_2 \rightarrow t_1$      $\Delta t \rightarrow dt$  to  $\Delta r \rightarrow dr$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



# Prędkość chwilowa jako granica prędkości średniej



$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

skoro  $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$  to  $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} \frac{dx}{dt} + \hat{j} \frac{dy}{dt} = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y$

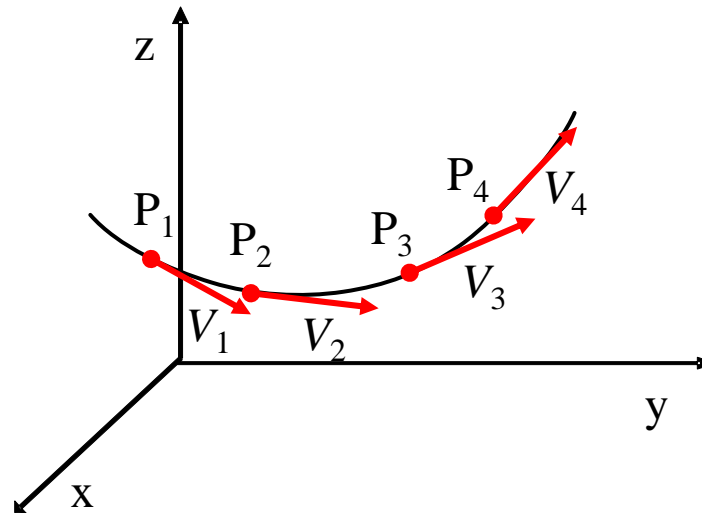
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad \vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}$$

Wektor prędkości chwilowej jest zawsze styczny do toru.





# Przyspieszenie

Przyspieszenie związane jest ze zmianą wektora prędkości

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \hat{i} \frac{dV_x}{dt} + \hat{j} \frac{dV_y}{dt} = \hat{i} a_x + \hat{j} a_y$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}$$

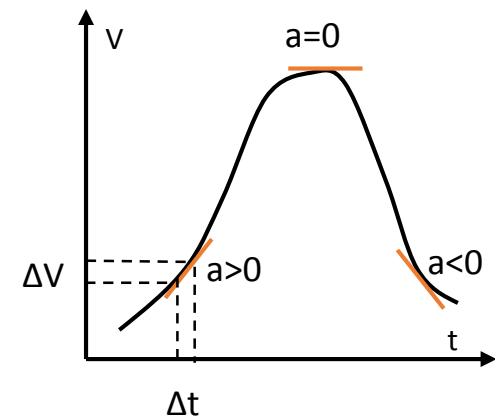
$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Jeżeli  $\vec{a} = const$  to  $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t$

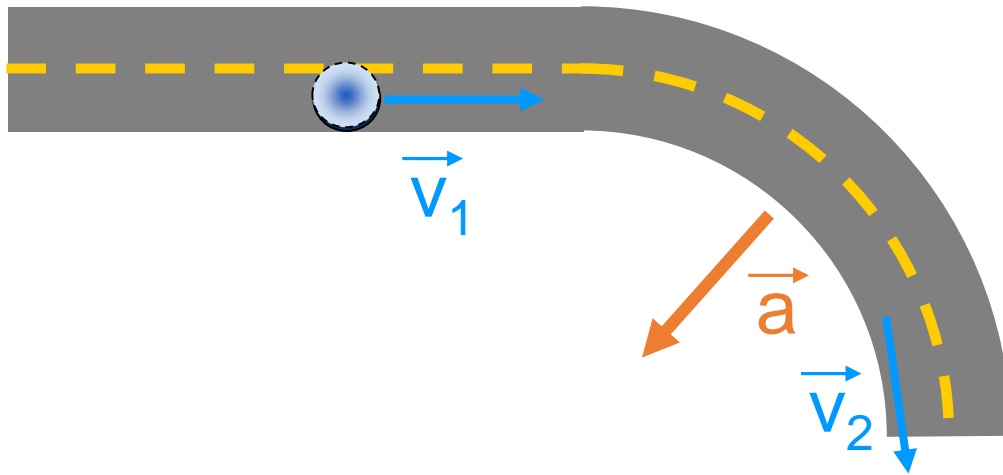
ponieważ:

$$\frac{dV}{dt} = a \Rightarrow \int_{V_0}^V dV = \int_{t=0}^t a dt$$

więc  $V = V_0 + at$

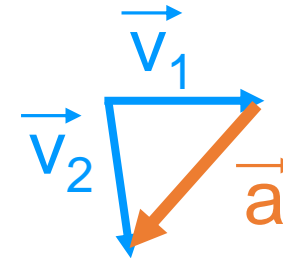


# Ruch krzywoliniowy

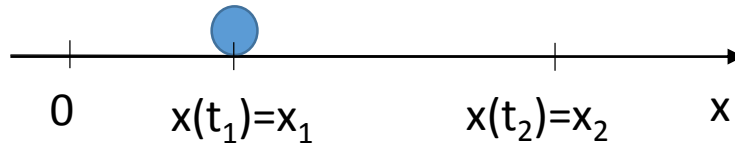


Konsekwencją tego jest  
występowanie przyspieszenia  
pomimo stałej wartości prędkości

W ruchu krzywoliniowym  
występuje zmiana wektora  
prędkości.



# Przypadek szczególny - ruch prostoliniowy



Przemieszczenie  $\Delta x = x_2 - x_1$

Przemieszczenie może być dodatnie lub ujemne.  
Znak zależy od zgodności z osią OX.



# Przykład

Zakładając, że  $a = \text{const.}$  oraz warunki początkowe:  $v(t=0) = v_0$   
 $x(t=0) = x_0$  wyprowadzić równania ruchu  $v(t)$  oraz  $x(t)$ .

$$v = \int a \, dt = a \int dt = at + C$$

$$v(0) = v_0 \quad v(0) = a \cdot 0 + C = C \quad \rightarrow \quad C = v_0$$

$$v = at + v_0$$

$$x = \int v \, dt = \int (at + v_0) \, dt = \int at \, dt + \int v_0 \, dt$$

$$\int at \, dt = \frac{1}{2} at^2 + C_1$$

$$\int v_0 \, dt = v_0 t + C_2 \quad x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C$$





# Przykład

Zakładając, że  $a = \text{const.}$  oraz warunki początkowe:  $v(t=0) = v_0$   
 $x(t=0) = x_0$  wyprowadzić równania ruchu  $v(t)$  oraz  $x(t)$ .

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C$$

$$x(0) = x_0 \quad x(0) = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C \quad \rightarrow \quad C = x_0$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

Wzory na położenie i czas w ruchu jednostajnie zmiennym:

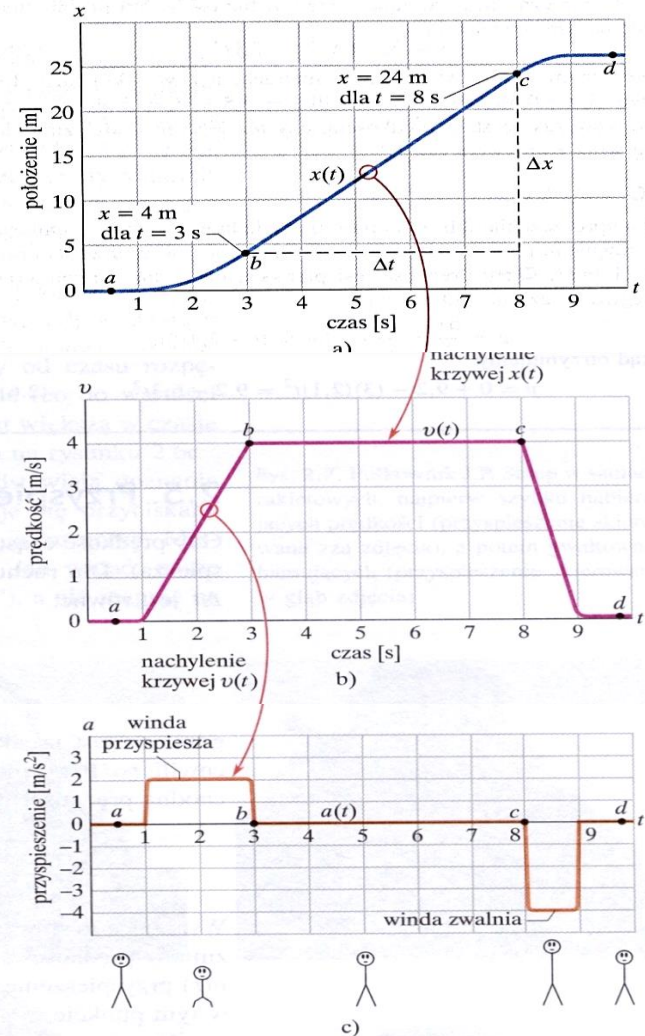
$$x(t) = \pm x_0 \pm V_0t \pm \frac{1}{2}at^2$$

$$V(t) = \pm V_0 \pm a_0t$$

# $v(t)$ i $a(t)$ graficznie

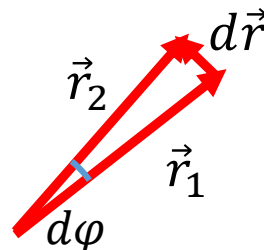
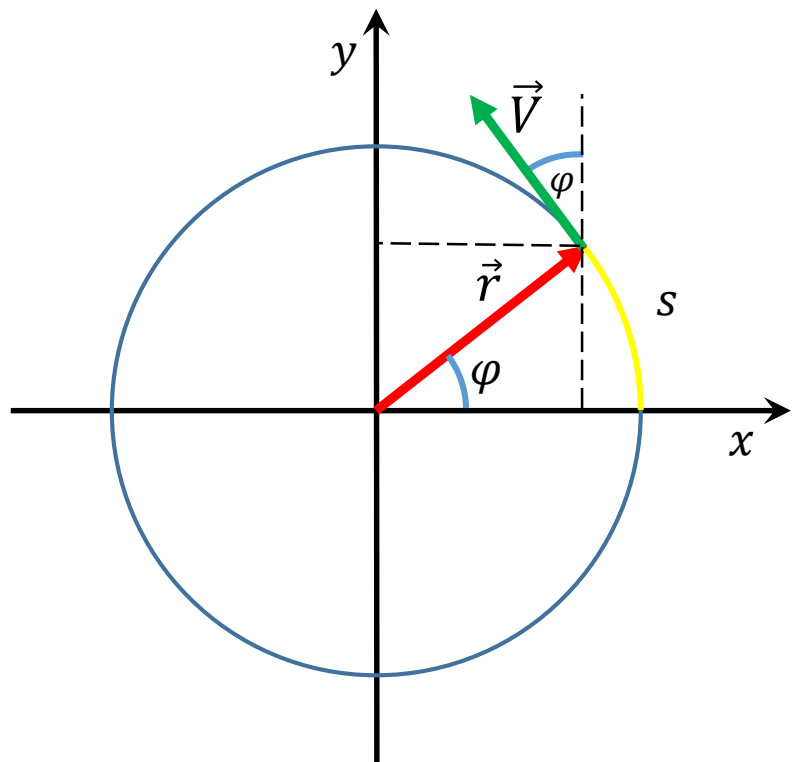


Rys. 2.6. Przykład 2.2. a) Wykres  $x(t)$  dla windy, wznoszącej się wzdłuż osi  $x$ . b) Wykres  $v(t)$  dla tej windy. Jest to wykres pochodnej funkcji  $x(t)$  (gdyż  $v = dx/dt$ ). c) Wykres  $a(t)$  dla tej windy. Jest to wykres pochodnej funkcji  $v(t)$  (gdyż  $a = dv/dt$ ). Figurki z patyczków, narysowane pod wykresem pokazują, jak przyspieszenie działa na ciało pasażera





# Ruch po okręgu



$$V = \frac{s}{t} \quad \varphi = \frac{s}{r}$$

$$d\varphi = \frac{dr}{r} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{V}{r} = \omega$$

$$V = \omega r$$

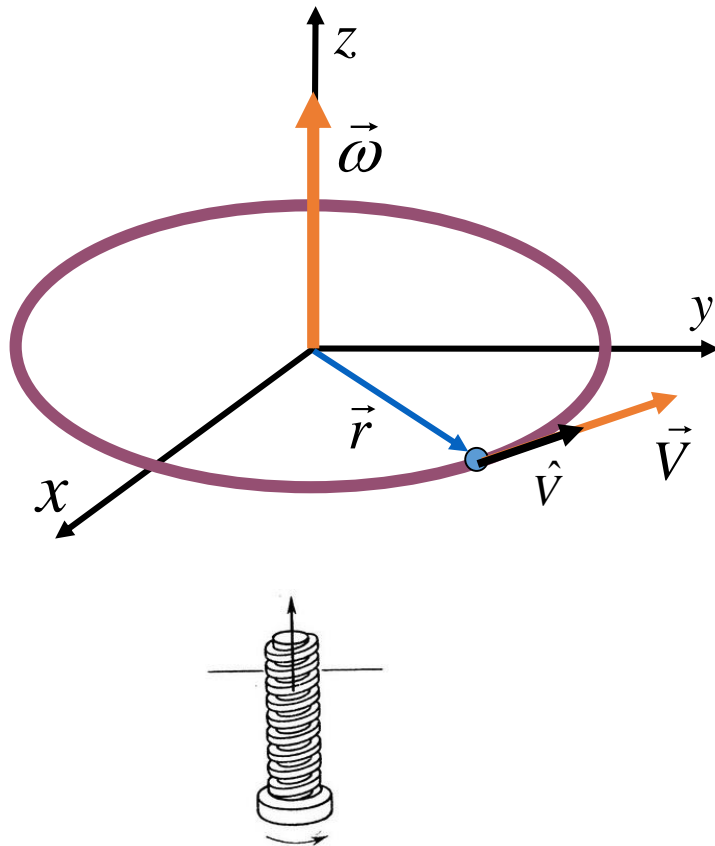
wektorowo

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

$$\vec{r} = r \cos \varphi \hat{i} + r \sin \varphi \hat{j}$$

# Związek pomiędzy prędkością liniową i kątową

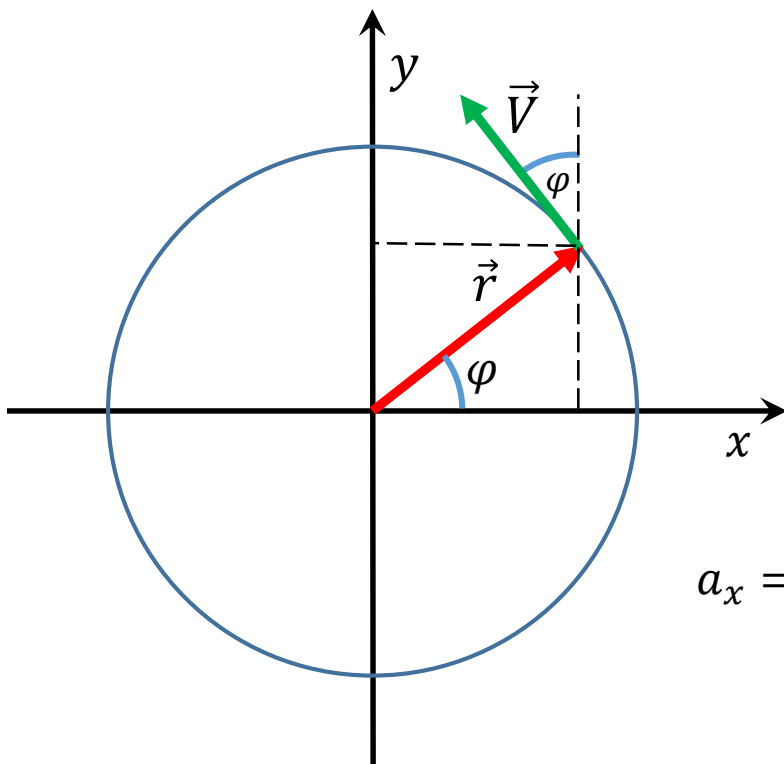


$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

w ruchu jednostajnym  
po okręgu, wektor  
prędkości kątowej  
jest stały

reguła śruby prawoskrętnej!!

# Ruch niejednostajny po okręgu



dla współrzędnej x:

$$x(t) = r \cdot \cos \varphi(t)$$

pochodna  
wewnętrzna



$$V_x = \frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin \varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

druga  
pochodna



$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \cos \varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - r \cdot \sin \varphi(t) \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \cos \varphi(t) \cdot \omega \cdot \omega - r \cdot \sin \varphi(t) \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi(t) - r \cdot \sin \varphi(t) \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$



# Ruch niejednostajny po okręgu

$$x(t) = r \cdot \cos \varphi(t) \quad V_x = \frac{dx}{dt} = -r \cdot \sin \varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi(t) - r \cdot \sin \varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -r \cdot \omega \cdot \sin \varphi(t)$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi(t) - r \cdot \sin \varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$x(t) \quad \frac{V_x}{\omega}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\omega^2 \cdot x + \frac{V_x}{\omega} \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad a_x = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_x - \omega^2 \cdot x$$



# Ruch niejednostajny po okręgu

dla współrzędnej  $y$ :  $y(t) = r \cdot \sin \varphi(t)$   $\rightarrow$   $V_x = \frac{dy}{dt} = r \cdot \cos \varphi(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi(t) + r \cdot \cos \varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = r \cdot \omega \cdot \cos \varphi(t)$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi(t) + r \cdot \cos \varphi(t) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$y(t) \quad \frac{V_y}{\omega}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 \cdot y + \frac{V_y}{\omega} \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad a_y = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_y - \omega^2 \cdot y$$



# Ruch niejednostajny po okręgu

$$a_x = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_x - \omega^2 \cdot x \qquad a_y = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_y - \omega^2 \cdot y$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = \left( \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_x - \omega^2 \cdot x \right) \hat{i} + \left( \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_y - \omega^2 \cdot y \right) \hat{j}$$

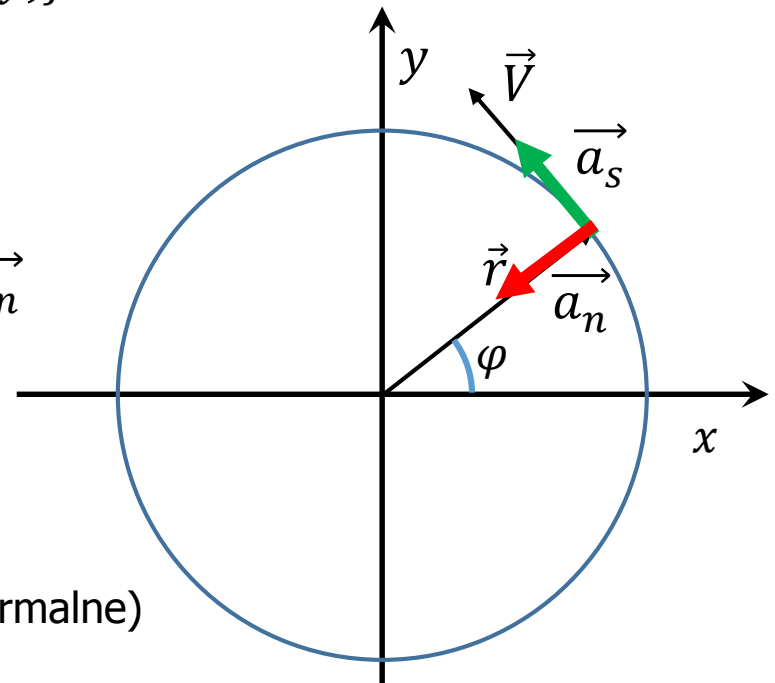
$$\vec{a} = \left( \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_x \right) \hat{i} - (\omega^2 \cdot x) \hat{i} + \left( \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot V_y \right) \hat{j} - (\omega^2 \cdot y) \hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot (V_x \hat{i} + V_y \hat{j}) - \omega^2 \cdot (x \hat{i} + y \hat{j})$$

$$\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \vec{V} - \omega^2 \cdot \vec{r} = \vec{a}_s + \vec{a}_n$$

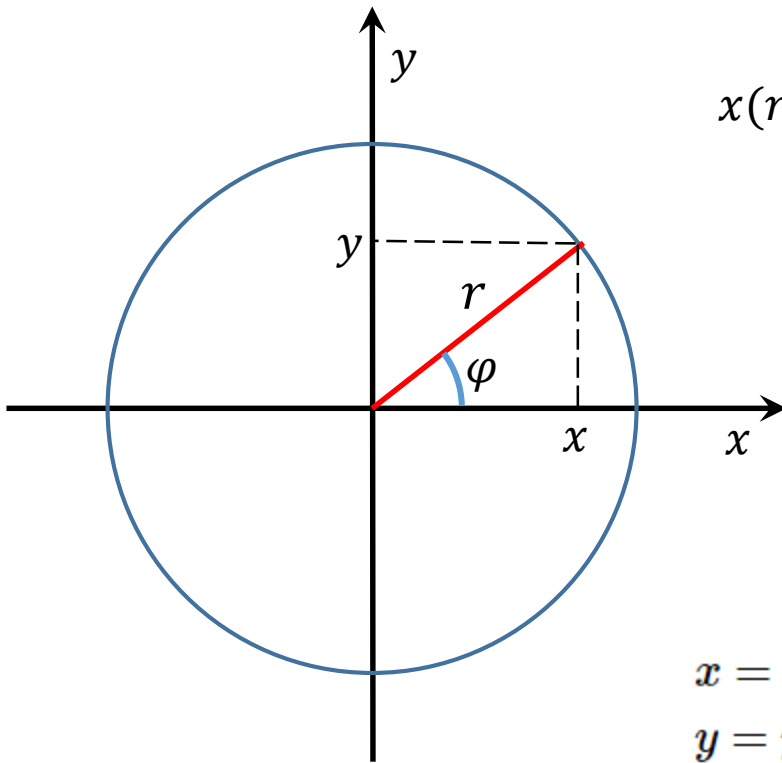
$$\vec{a}_s = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \vec{V} \quad - \text{przyspieszenie styczne}$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r} \quad - \text{przyspieszenie dośrodkowe (normalne)}$$





# Układ współrzędnych biegunowych



$$x(r, \varphi) = r \cdot \cos \varphi(t)$$

$$y(r, \varphi) = r \cdot \sin \varphi(t)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

## Współrzędne sferyczne

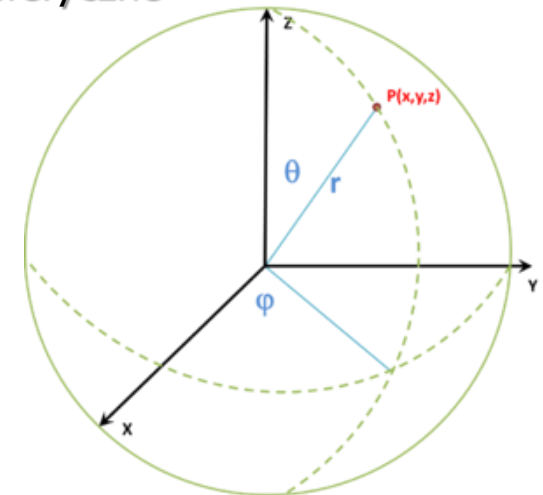
$$x = x(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = y(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = z(r, \theta, \phi) = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \operatorname{arccos} \frac{z}{r} = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$





- kiedy maleje składowa  $V_y$  prędkości, to rośnie składowa  $V_x$ ;
- przyspieszenie dośrodkowe skierowane jest wzdłuż promienia  
- do środka okręgu

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

- wartość przyspieszenia dośrodkowego jest równa:

$$a_n = \frac{V^2}{r}$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r} = -\frac{V^2}{r^2} \cdot r \cdot \hat{r} = -\frac{V^2}{r} \cdot \hat{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = r \cdot \hat{r}$$

# Przykład



1. Pająk porusza się po torze krzywoliniowym, którego długość opisana jest równaniem:  $S(t) = S_0 e^{ct}$  gdzie  $S_0$  i  $c$  to stałe. Wektor przyspieszenia pająka tworzy w każdym punkcie toru stały kąt  $\varphi$  ze styczną do jego toru.

Obliczyć wartość:

- a) przyspieszenia stycznego,
- b) przyspieszenia normalnego,
- c) promienia krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej.

ROZWIĄZANIE:

a) przyspieszenie styczne  $a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad V = \frac{dS}{dt} = c \cdot S_0 \cdot e^{ct}$

stąd  $a_s = c^2 S_0 e^{ct}$

# Przykład cd.

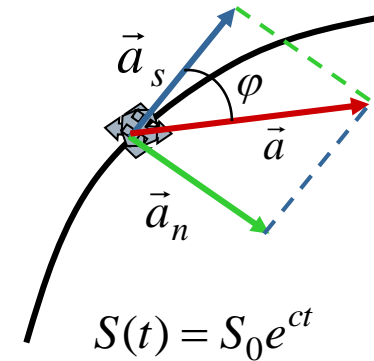


b) z rysunku wynika że

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_s}$$

stąd

$$a_n = a_s \cdot \operatorname{tg} \varphi = c^2 S_0 e^{ct} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$



c) z innej definicji przyspieszenia dośrodkowego (normalnego):

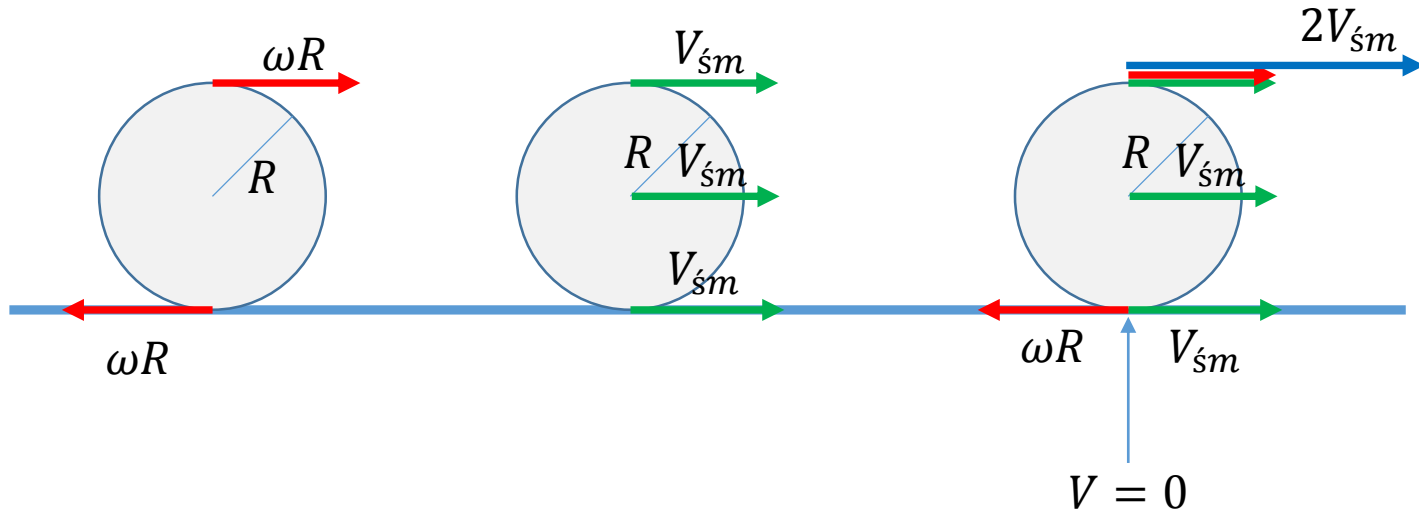
$$a_n = \frac{V^2}{r} \quad \text{stąd podstawiając wyliczone wcześniej} \quad V = c \cdot S_0 \cdot e^{ct}$$

$$r = \frac{V^2}{a_n} = \frac{c^2 S_0^2 \cdot (e^{ct})^2}{c^2 S_0 \cdot e^{ct} \cdot \operatorname{tg} \varphi} = S_0 \cdot e^{ct} \cdot \operatorname{ctg} \varphi = S \cdot \operatorname{ctg} \varphi$$



# Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu – musi występować tarcie między ciałem a podłożem, jest specyficznym rodzajem ruchu ciała, będącym złożeniem ruchu postępowego (środka masy) i ruchu obrotowego - wokół środka masy.



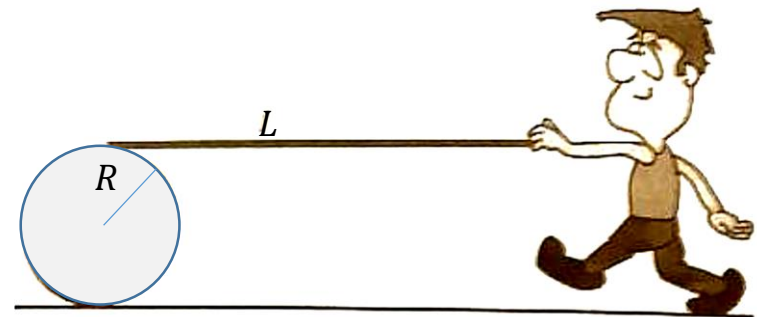


# Przykład

Człowiek trzyma za jeden koniec deski o długości  $L$  opartej drugim końcem na walcu o promieniu  $R$ . Następnie człowiek zaczyna iść pchając deskę, która bez poślizgu toczy się po walcu, który toczy się po podłożu.

- Jaką odległość musi przejść człowiek aby dotrzeć do walca ?
- Czy/jak zależy to od promienia walca ?

W czasie  $t$  środek walca przebędzie odległość  $S = L = v \cdot t$   
W tym samym czasie górny punkt styczności z deską przesunie się na odległość  $2v \cdot t = 2L$   
Czyli człowiek będzie musiał przebyć odległość  $2L$  niezależnie od promienia walca.

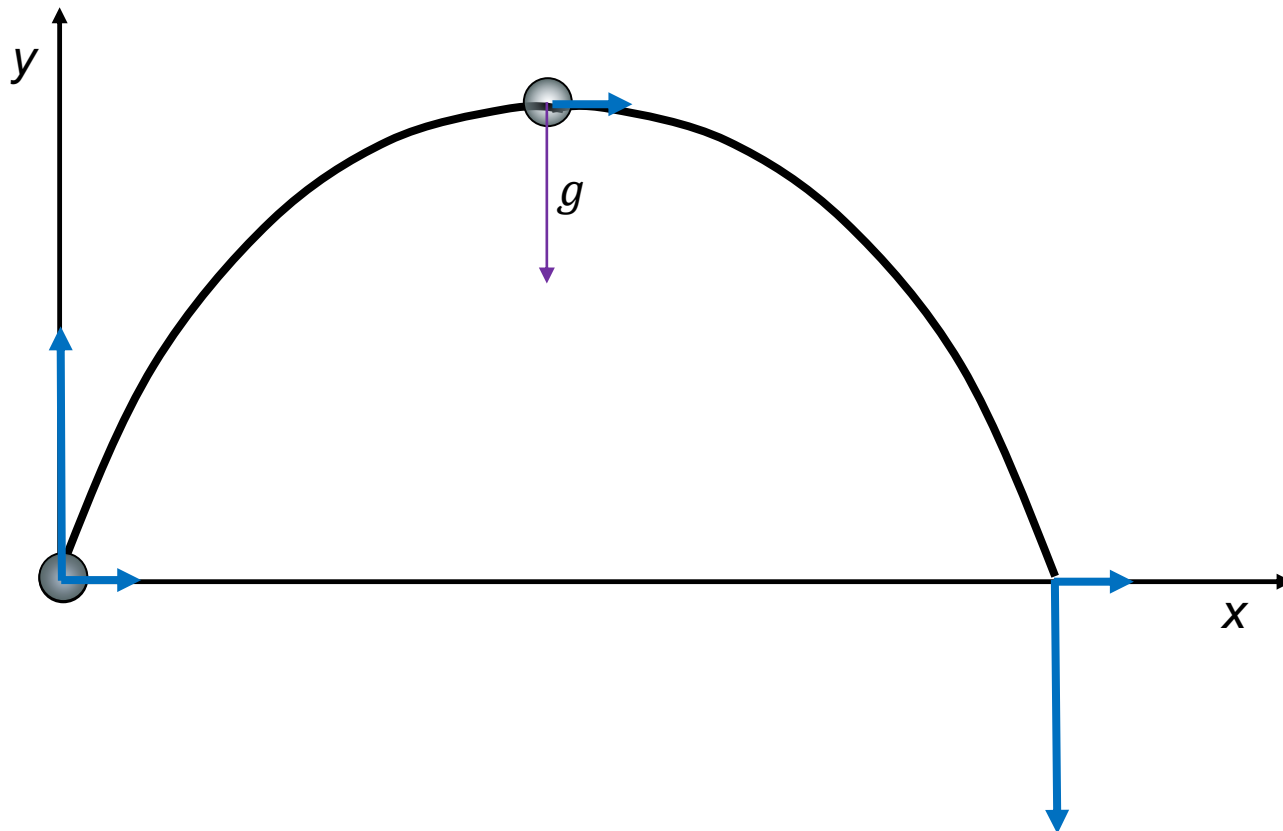




# Rzut ukośny

jest to złożenie dwóch niezależnych ruchów:

- ruchu jednostajnego w poziomie – oś  $x$
- ruchu jednostajnie zmiennego w pionie – oś  $y$





# Rzut ukośny

Dla osi  $x$ :

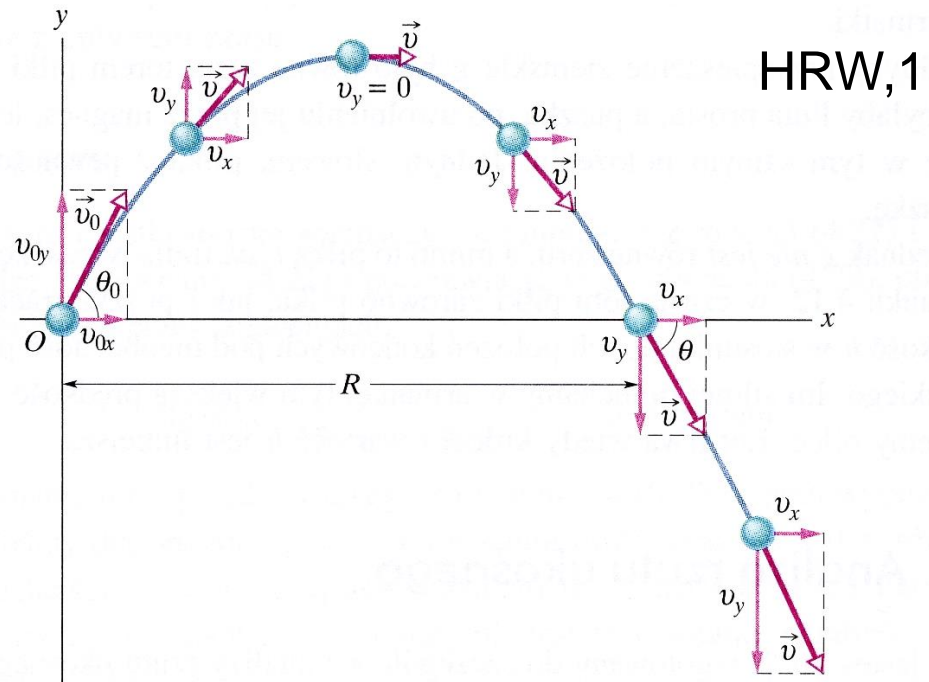
$$F_x = 0; a_x = 0,$$

ruch jednostajny

Dla osi  $y$ :

$$F_y = mg; a_y = g,$$

ruch jednostajnie zmienny



**Rys. 4.10.** Tor pocisku wystrzelonego z punktu o współrzędnych  $x_0 = 0$  i  $y_0 = 0$ , z prędkością początkową  $\vec{v}_0$ . Na rysunku pokazano wektor prędkości początkowej i wektory prędkości cząstki w różnych punktach jej toru oraz składowe tych wektorów. Należy zauważyć, że składowa pozioma prędkości pozostaje stała, a jej składowa pionowa zmienia się w sposób ciągły.

*Zasięg rzutu  $R$  jest to droga, którą przebywa cząstka w poziomie do chwili jej powrotu na wysokość, z której została wyrzucona*





# Rzut ukośny

$$s(t) = \pm s_0 \pm V_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

$$V(t) = \pm V_0 \pm a_0 t$$

Oś x:

$$x(t) = V_x t$$

$$V_x(t) = V_{0x} = \text{const}$$

Oś y:

$$V_y(t) = V_{0y} - gt$$

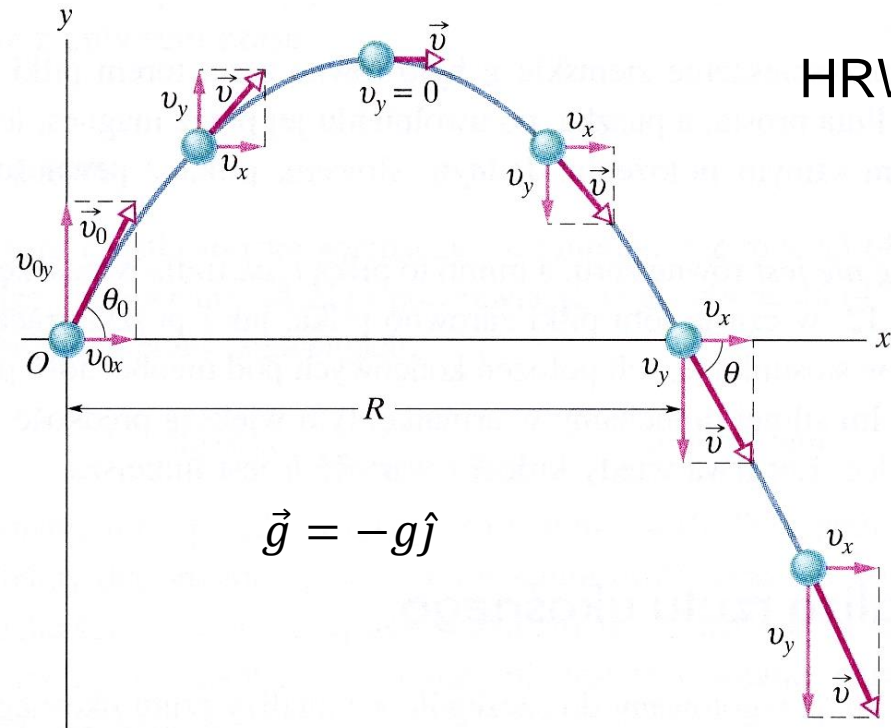
$$y(t) = V_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$$

$$V_{0x} = V_0 \cos \theta_0$$

$$V_{0y} = V_0 \sin \theta_0$$

$$y = (\text{tg} \theta_0) x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

równanie toru - parabola



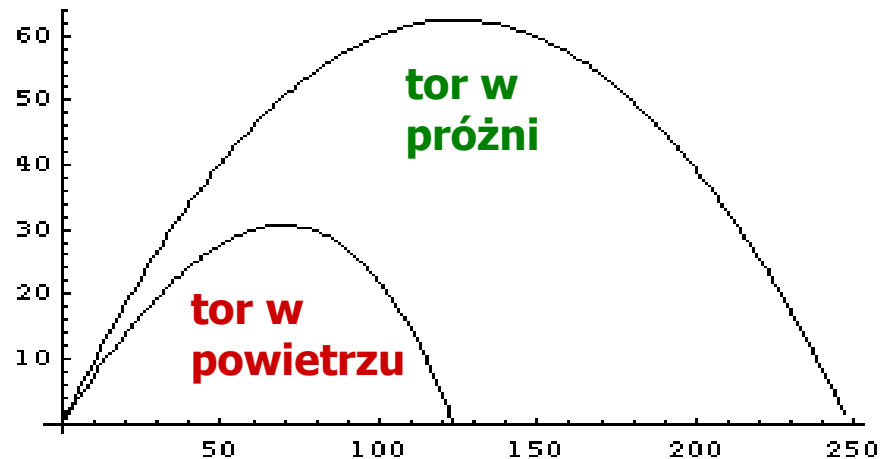


# Rzut ukośny – w powietrzu

Siła oporu powietrza wpływa na tor rzutu ukośnego !

Piłka do gry w baseball rzucona pod kątem  $45^\circ$  z prędkością  $v = 50$  m/s osiąga:

- bez oporu powietrza -
  - wysokość 63 m,
  - zasięg 254 m,
- z oporem powietrza -
  - wysokość 31 m,
  - zasięg 122 m



optymalny kąt rzutu wynosi:

20°- 30°

45°



# Rzut poziomy

Dla osi OX

*ruch jednostajny*

$$x(t) = V_x t$$



$$t = \frac{x}{V_x}$$



Dla osi OY

*ruch jednostajnie przyspieszony*

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$



$$y = h - \frac{gx^2}{2V_x^2}$$

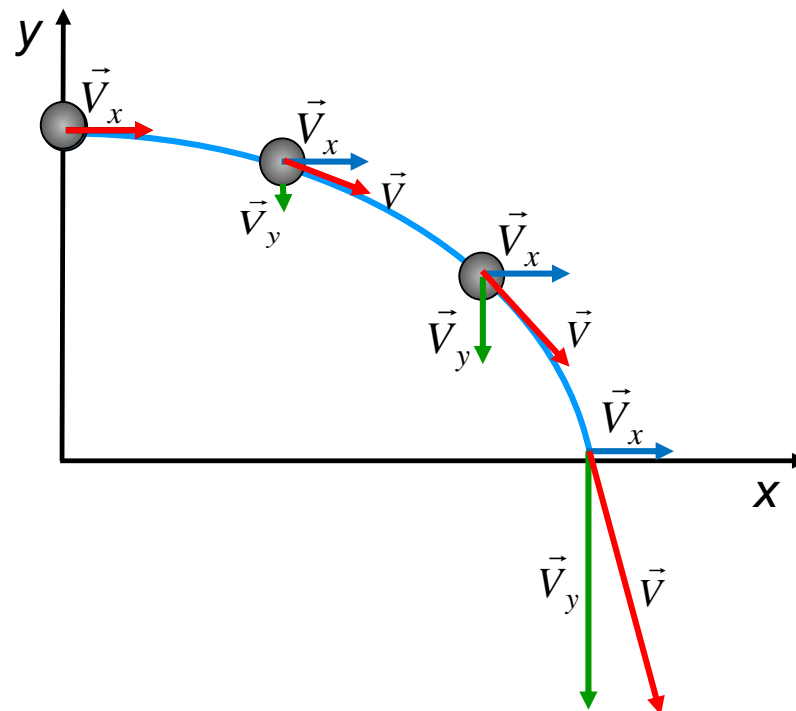
Równanie toru – parabola – typu:

$$y(t) = bx^2$$

$$V_x(t) = V_x = V_0$$

$$V_y(t) = -gt$$

$$V_0 = V_x = \text{const}$$



$$\vec{V}(t) = \vec{V}_x + \vec{V}_y(t) = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$



# Przykład - zadanie

Piłkę wyrzucono ukośnie w górę pod kątem  $45^\circ$  z prędkością początkową  $V_0 = 12$  m/s. W odległości 12 m od miejsca wyrzutu stoi pionowa ściana. Oblicz:

- czas  $t_t$  po którym piłka trafi w ścianę,
- składowe prędkości piłki  $V_x$  i  $V_y$  w momencie trafienia i szybkość wypadkową  $V$ ,
- kąt pod jakim piłka trafi w ścianę,
- maksymalną wysokość  $H$  na jaką wzniesie się piłka,
- wysokość od podstawy ściany  $h$  na jakiej piłka w nią uderzy,
- w jakiej odległości  $X$  od ściany piłka po sprężystym od niej odbiciu uderzy w ziemię.

$$s(t) = \pm s_0 \pm V_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

$$V(t) = \pm V_0 \pm a_0 t$$



# Przykład - zadanie

Wspinacze utknęli na szczycie skały wznoszącej się 250 m nad poziomem ziemi. Samolot mający dostarczyć zaopatrzenie leci poziomo na wysokości 200 m ponad wspinaczami, z szybkością 250 km/h. Gdy znajduje się w pewnej odległości od szczytu skały następuje wyrzut zasobnika.

- W jakiej odległości od celu zasobnik powinien zostać upuszczony z samolotu?
- Jeżeli samolot zbliży się na odległość 400 m, to z jaką szybkością pionową (w górę czy w dół?) zasobnik musi być wyrzucony aby trafił w cel?
- Z jaką szybkością uderzy on w szczyt skały?

$$s(t) = \pm s_0 \pm V_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

$$V(t) = \pm V_0 \pm a_0 t$$