Wykład 4

Dynamika

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak

Przyczyny ruchu

- Jeśli ciało znajduje się we właściwym miejscu, to jego ruch jest możliwy jedynie pod wpływem działania sił zewnętrznych. Z wyjątkiem ciał niebieskich stanem normalnym jest stan spoczynku.

Arystoteles (384-322 pne.)

- Każde ciało trwa w swym stanie: spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu.

Isaac Newton (1642-1727)

Zasady dynamiki

Principia Mathematica Philosophiae Naturalis

1687 – zasady dynamiki

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Istnieje ***układ inercjalny*** – tzn. układ odniesienia, w którym ciało, na które nic nie działa, spoczywa lub porusza się bez przyspieszenia.

Zasada bezwładności Newtona jest <u>postulatem istnienia</u> układu inercjalnego.

Jeśli istnieje jeden układ inercjalny, to każdy inny układ poruszający się względem niego z prędkością **V = const** jest też układem inercjalnym; istnieje więc nieskończenie wiele układów inercjalnych

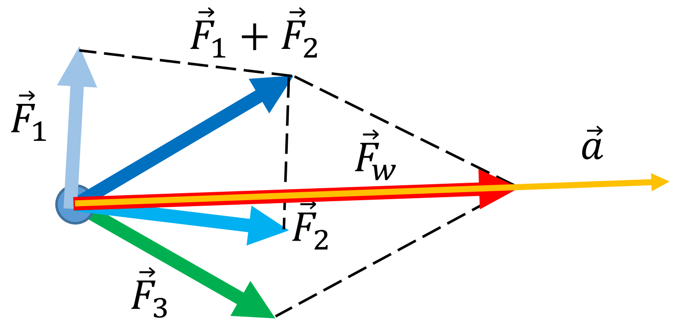
Druga zasada dynamiki Newtona

Niezerowa wypadkowa sił zewnętrznych działających na ciało nadaje ciału przyspieszenie o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem siły wypadkowej oraz wartości wprost proporcjonalnej do wartości tej siły a odwrotnie proporcjonalnej do masy ciała.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}}$$

Obowiązuje w inercjalnym układzie odniesienia

Druga zasada dynamiki



$$\vec{F}_w = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Druga zasada dynamiki Newtona:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

Przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Różniczkowe równanie ruchu:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_w\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$$

siła może nie być stała, lecz może zależeć od położenia, prędkości, czasu

Druga zasada dynamiki

Jeśli znamy rozkład sił i masę ciała oraz warunki początkowe dla położenia i prędkości, to rozwiązując równanie ruchu

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_w(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$$

otrzymamy układ trzech równań skalarnych, opisujących zachowanie ciała w czasie:

$$x = x\ (t)$$

$$y = y\ (t)$$

$$z = x\ (t)$$

Przykłady

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$ ruch ładunku w polu magnetycznym

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E}$$ ruch ładunku w polu elektrycznym

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g}$$ ruch masy w polu grawitacyjnym

Np.: rzut pionowy, poziomy lub ukośny

Druga zasada dynamiki

Uogólniona zasada dynamiki

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Zmiana pędu wymaga działania siły

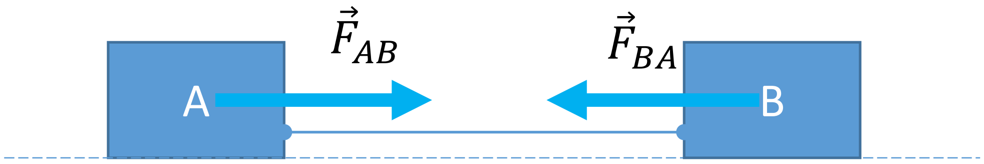
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right) = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Dla stałej masy:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}$$

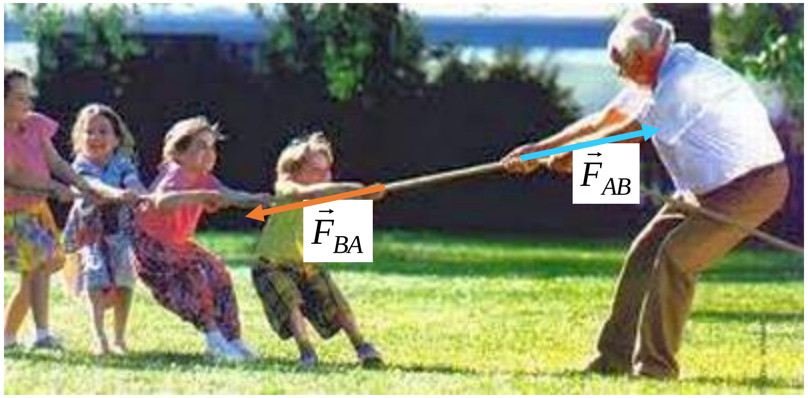
Trzecia zasada dynamiki

Każdemu działaniu (akcji)
towarzyszy przeciwdziałanie (reakcja)



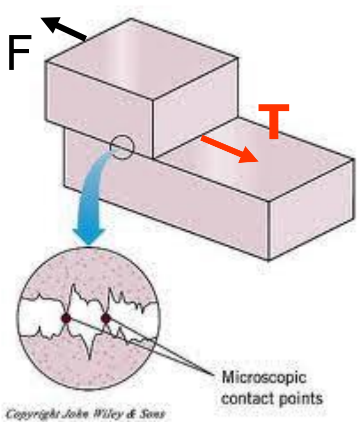
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

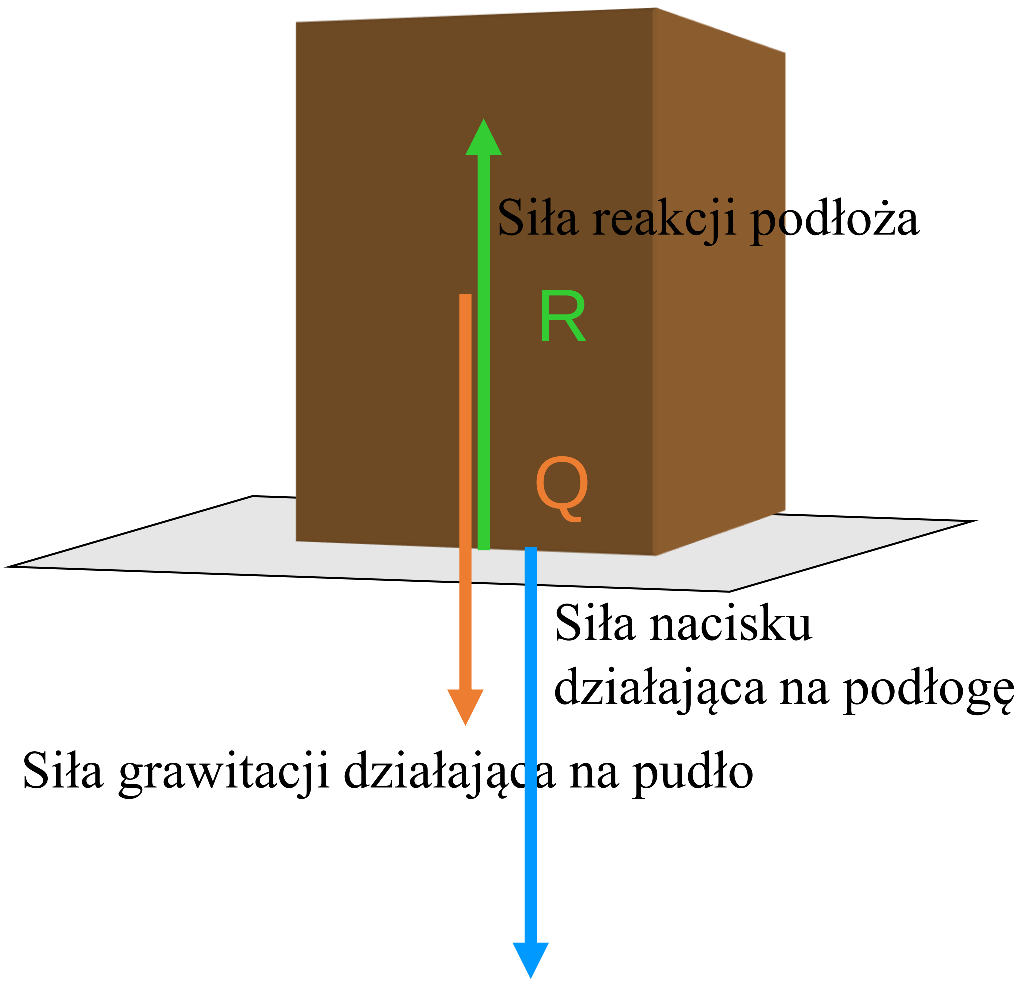
Siła działająca na ciało A ze strony ciała B jest równa co do wartości sile działającej na ciało B ze strony ciała A.



Przykłady istotnych sił rzeczywistych

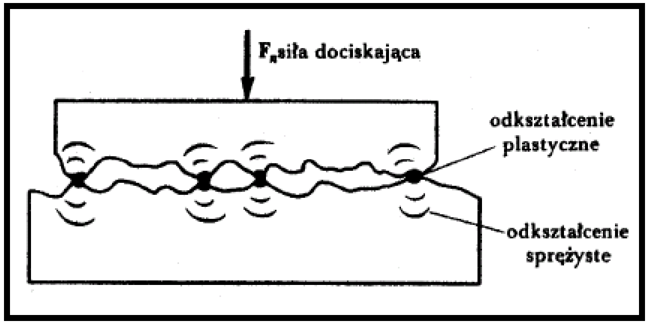
- Siła grawitacji (ciężkości)
- Siła nacisku-reakcji
- Siła naprężenia
- Siła tarcia (oporu)
- Siła dośrodkowa





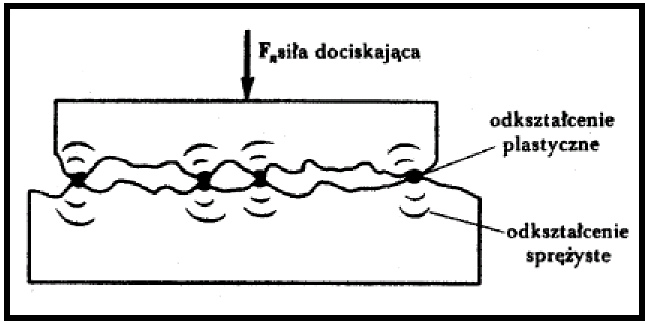
Tarcie

- Źródłem siły tarcia jest oddziaływanie pomiędzy ciałem a powierzchnią, po której jest wprawiane w ruch.
- Tarcie jest powodowane przez oddziaływanie elektromagnetyczne między cząstkami/atomami stykających się ciał.
- Siła tarcia jest sumą wektorową sił działających między atomami na powierzchni jednego i drugiego ciała.
- Powierzchnia rzeczywistego kontaktu mikroskopowego obu ciał może być nawet 10 000 razy mniejsza od powierzchni pozornego makroskopowego kontaktu.



Tarcie

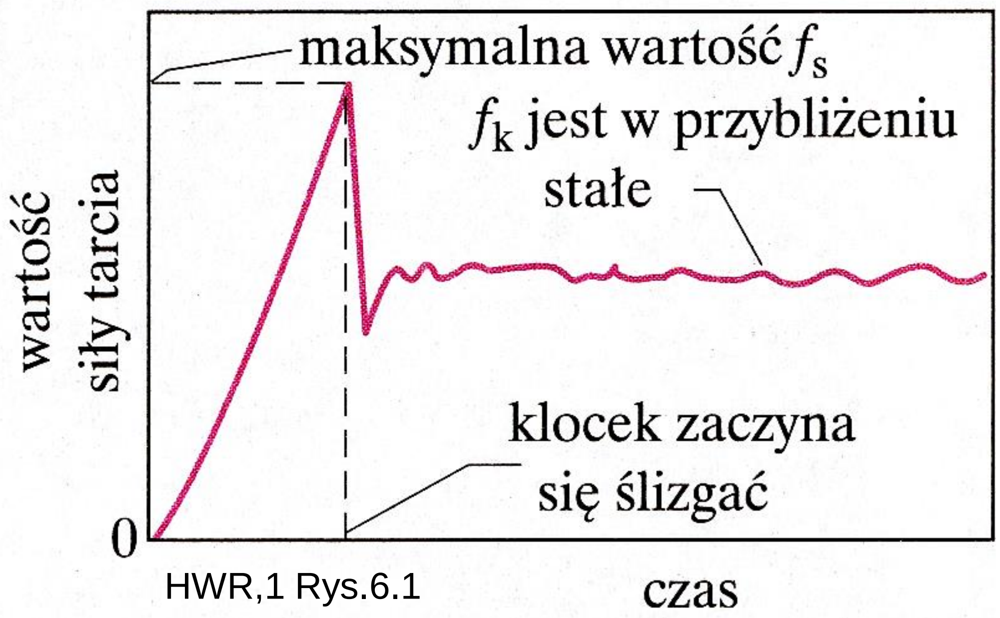
1. Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego równoważy składową siły równoległą do powierzchni. Siła tarcia statycznego dopasowuje się do siły usiłującej wprawić ciało w ruch.
2. Maksymalna wartość siły tarcia statycznego dana jest wzorem $T_{Smax} = \mu_s N$, gdzie μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego, N jest wartością siły nacisku - prostopadłej do powierzchni, równej sile reakcji działającej na ciało.
3. Jeżeli wartość składowej siły *F*, równoległej do powierzchni przekracza wartość T_{Smax} to ciało zaczyna się ślizgać. Wartość siły tarcia gwałtownie wówczas maleje do
   $T_k = \mu_k N$, gdzie jest μ_k jest współczynnikiem tarcia kinetycznego



Tarcie

Przykładowe współczynniki tarcia:

Materiał	Wsp. tarcia statycznego μ_s	Wsp. tarcia kinetycznego μ_k
stal / stal	0.6	0.4
po dodaniu smaru do stali	0.1	0.05
metal / lód	0.022	0.02
opona / sucha nawierzchnia	0.9	0.8
opona / mokra nawierzchnia	0.8	0.7



HWR,1 Rys.6.1

Tarcie wewnętrzne – lepkość

- Lepkość to opór, powstający pomiędzy warstwami (strugami) cieczy lub gazu przemieszczającymi się względem siebie.
- Rodzaj przepływu określa liczba Reynoldsa:

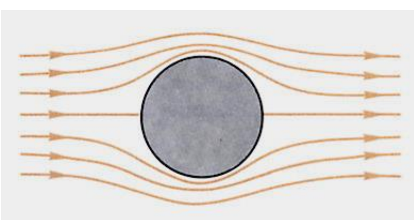
$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{v}\,\rho L}{\eta} = \frac{\mathrm{v}\,L}{\upsilon}$$

V – prędkość; ρ - gęstość

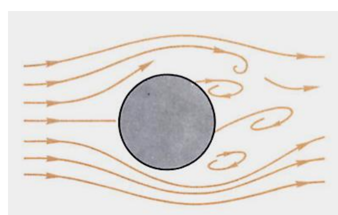
L – charakterystyczny rozmiar ciała

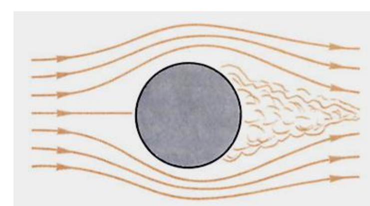
η - współ. lepkości (dynamiczny) $[Pa \cdot s]$

υ - współ. lepkości (kinematyczny) $\left[\frac{m^2}{s}\right]$



przepływ laminarny
Re << 1





przepływ turbulentny
Re > 2000

Tarcie wewnętrzne – lepkość

- Prędkość graniczna

$$V_{gr} = \sqrt{\frac{2F_g}{C \cdot \rho \cdot S}}$$

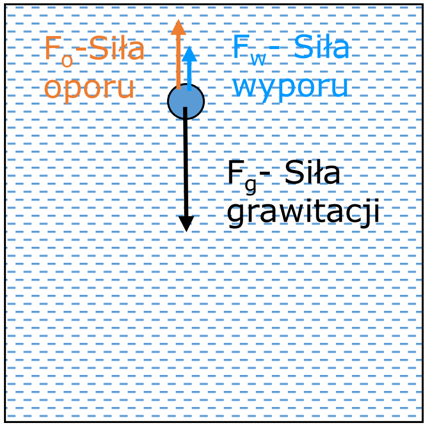
C – współczynnik oporu
ρ - gęstość ośrodka
S - pole przekroju

$$V_{gr} = \frac{(m_k - m_p) \cdot g}{6\pi\eta r}$$

prędkość graniczna kulki $\Leftarrow$

- Siła Stokes'a

Kulka o promieniu *r* porusza się w ośrodku lepkim (mała liczba Reynoldsa)



$F_o = 6\pi\eta r V$

$F_w = m_p \cdot g$

$F_g = m_k \cdot g$

gdzie:

m_p- masa płynu wypartego przez kulkę

m_k- masa kulki

Równanie ruchu kulki:

$$m\frac{dV}{dt} = m_k \cdot g - m_p \cdot g - 6\pi\eta r \cdot V$$

Zadanie

- Kostka o masie $M = 100$ g spoczywa na płaskiej poziomej powierzchni. Do kostki przyłożono poziomą siłę **F**, której wartość z każdą sekundą rośnie liniowo o 2 N. Przyjąć $g = 10$ m/s^2, współczynnik tarcia statycznego $\mu_s = 0{,}4$ a współczynnik tarcia kinematycznego $\mu_K = 0{,}2$.

a) Narysuj wykresy: siły **F** i wypadkowej siły działającej na kostkę w funkcji czasu, z zaznaczeniem maksymalnej wartości tarcia statycznego oraz tarcia kinetycznego.

b) Oblicz czas, po jakim kostka ruszy z miejsca.

c) Napisać równania przyspieszenia i prędkości kostki – w funkcji czasu wynikające z praw Newtona.

Siła ciężkości

- **Siła ciężkości** zwana również **siłą grawitacji** to siła, jaką dane ciało jest przyciągane przez inne ciało.

Źródłem siły ciężkości jest pole grawitacyjne Ziemi

Pole grawitacyjne jest to własność przestrzeni przejawiająca się tym, że na ciało o masie m umieszczone w tym polu działa siła F określona wzorem:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Od czego zależy natężenie pola grawitacyjnego (przyspieszenie grawitacyjne)?:

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

$$F = mg$$

$$g(r) = G\frac{M}{r^2}$$

Masa Ziemi jest bardzo duża M=5,98·1024 kg,

wytwarza zatem w swoim otoczeniu silne pole grawitacyjne

Zadanie

Pokazać, że kropla deszczu o promieniu 1,5 mm spadająca z chmury znajdującej się na wysokości 1200 m nad ziemią osiągałaby prędkość 550 km/h gdyby nie było oporu powietrza, podczas gdy w rzeczywistości spada na ziemię z prędkością 27 km/h. Założyć C=0,6; gęstość wody 1000 kg/m^3, gęstość powietrza 1,2 kg/m^3.

Dynamika w układach nieinercjalnych

ZASADY DYNAMIKI NEWTONA OBOWIĄZUJĄ W UKŁADACH INERCJALNYCH

Co można zrobić aby móc stosować te zasady w układach nieinercjalnych?

Siły pozorne,

Siły bezwładności

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_u$$

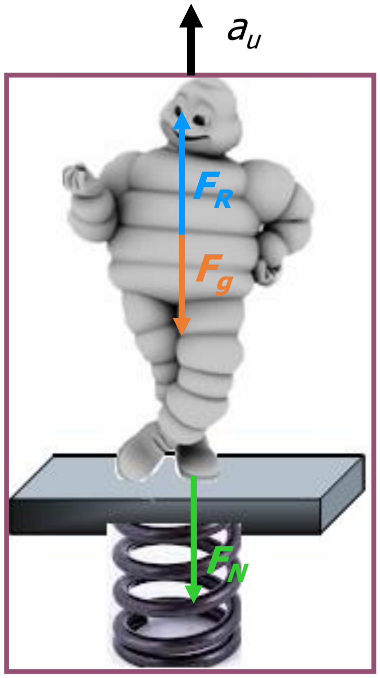
przyspieszenie układu

II zasada dynamiki:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_{rz} + \vec{F}_b = m\vec{a}$$

Ciężar pozorny

Winda rusza w górę ze stałym przyspieszeniem *a.* Jaki ciężar wskaże waga sprężynowa?



$$F_R - F_g = a_u \cdot m$$

waga wskazuje siłę F_N

ale $F_R = F_N$ *więc*

$$F_N = F_g + m \cdot a_u$$

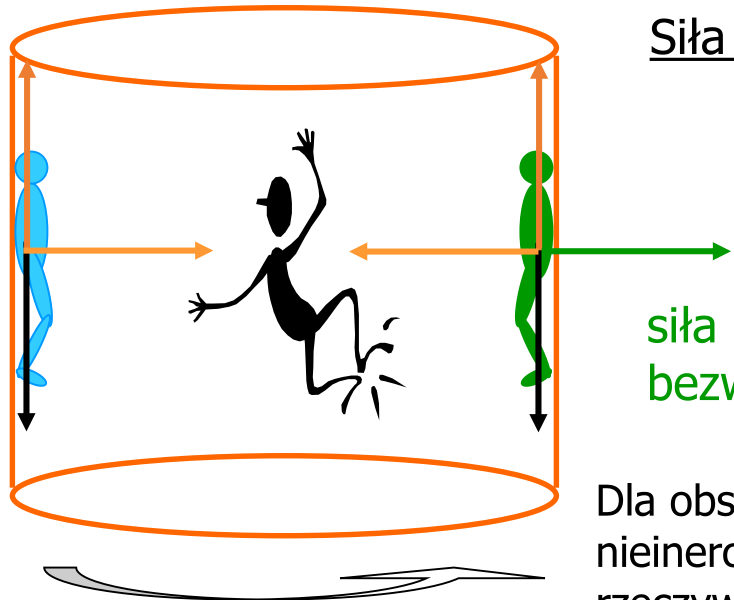
Dynamika w ruchu po okręgu

Obserwator w układzie inercjalnym wskaże siły

Siły rzeczywiste:

siła grawitacji
siła reakcji na nacisk
siła tarcia

Dla obserwatora w układzie inercjalnym siła reakcji na nacisk pełni rolę siły dośrodkowej



Obserwator w układzie nieinercjalnym

Siła pozorna:

siła odśrodkowa bezwładności

Dla obserwatora w układzie nieinercjalnym wszystkie siły: rzeczywiste i siła odśrodkowa (bezwładności) się równoważą

Czy Ziemia jest układem inercjalnym ?

Rotacja Ziemi wokół własnej osi

$\Downarrow$

$a_Z \approx 3 \cdot 10^{-2}$ m/s^2

Obieg wokół Słońca

$\Downarrow$

$a_O \approx 6 \cdot 10^{-3}$ m/s^2

Obieg Słońca w Galaktyce

$\Downarrow$

$a_S \approx 3 \cdot 10^{-10}$ m/s^2

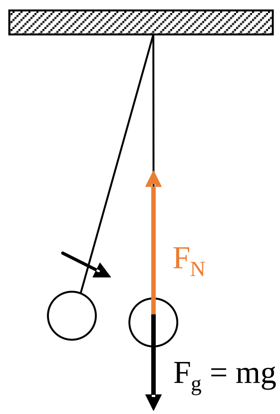
Z czym porównać oszacowane wartości przyspieszeń?

$g = 9{,}81$m/s^2

Wniosek?

Wahadło matematyczne

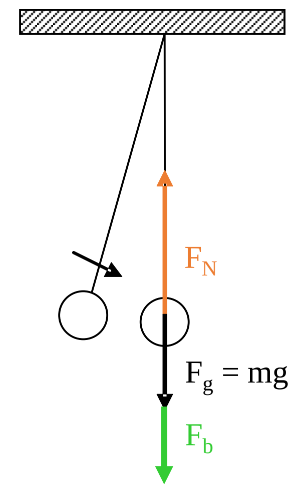
Układ inercjalny



$$\vec{F}_d = \vec{F}_N + \vec{F}_g \qquad \text{czyli} \quad F_d = F_N - F_g$$

$$\frac{mV^2}{r} = F_N - mg \qquad \Rightarrow F_N = \frac{mV^2}{2} + mg$$

Układ nieinercjalny



$$\vec{F}_{wyp} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_b = 0$$

czyli $F_N = F_g + F_b$

$$\vec{F}_N = mg + \frac{mV^2}{r}$$

Przyspieszenie i siła Coriolisa

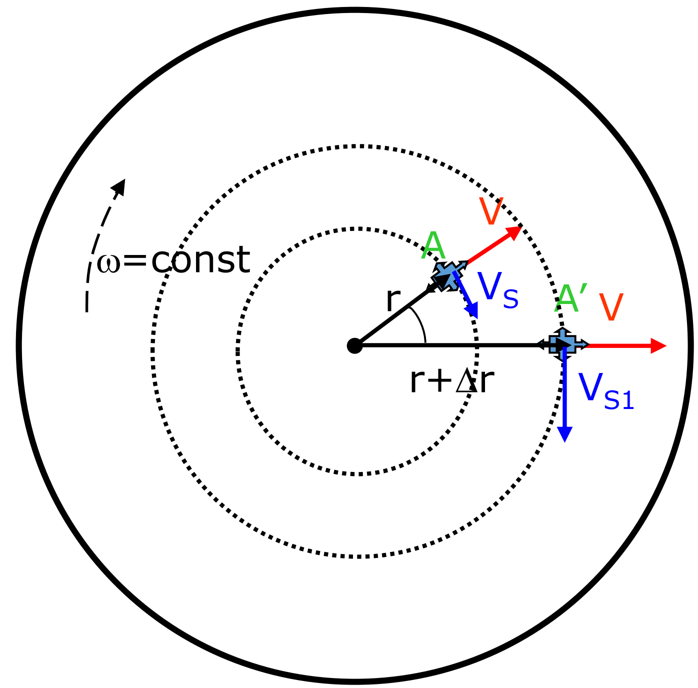
Mrówka na płycie gramofonowej

Płyta obraca się ze stałą prędkością kątową ω.

Mrówka porusza się względem płyty ruchem jednostajnym, prosto-liniowym - wzdłuż promienia, z punktu A do punktu A′ w czasie Δt z prędkością V.

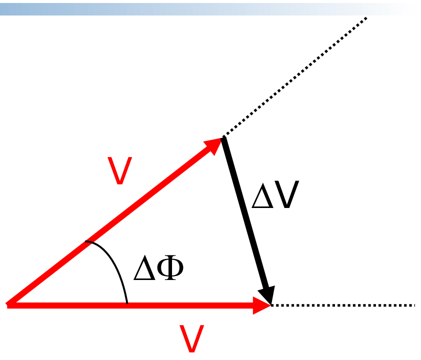
Prędkość styczna V_S rośnie wraz z odległością od środka płyty.

W tym czasie płyta obraca się o kąt $\Delta\varphi$



Przyspieszenie i siła Coriolisa

Skoro $\Delta\Phi$ jest małe to $\Delta V = V \cdot \Delta\Phi$



czyli $\frac{\Delta V}{\Delta t} = V \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ dla $\Delta t \to 0$ można zapisać:

$\frac{dV}{dt} = V \frac{d\Phi}{dt}$ czyli $a_1 = V \cdot \omega$

Prędkość V_S zmienia się od: $V_S = \omega \cdot r$
do wartości $V_{S1} = \omega \cdot (r + \Delta r)$

a więc $\Delta V_S = \omega \cdot (r + \Delta r) - \omega \cdot r$ czyli $\Delta V_S = \omega \cdot \Delta r$ $|:\Delta t$

otrzymujemy $\frac{\Delta V_S}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t}$ dla $\Delta t \to 0$ $\frac{dV_S}{dt} = \omega \frac{dr}{dt}$ czyli $a_2 = V \cdot \omega$

a_1 i a_2 to wartości wektorów o tym samym kierunku-wzrastającego φ

Całkowite przyspieszenie $a_C = a_1 + a_2 = 2V \cdot \omega$ $\leftarrow$ *przyspieszenie Coriolisa*

W układzie nieinercjalnym mrówka jest w stanie równowagi $\Rightarrow$

Przyspieszenie i siła Coriolisa

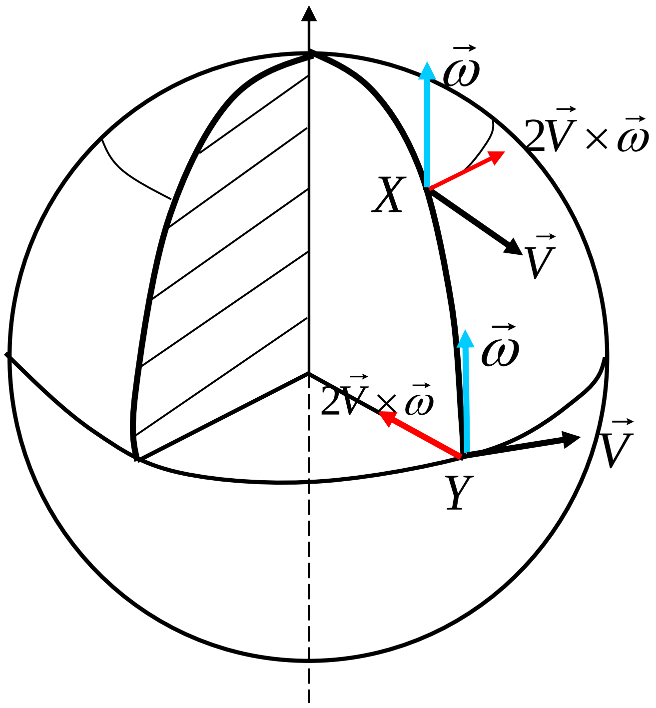
Tarcie działające na mrówkę ma dwie składowe:
radialną – równoważona przez siłę odśrodkową oraz
styczną (zgodną z kierunkiem obrotu płyty) – równoważoną przez
siłę działającą stycznie, przeciwnie do kierunku obrotu płyty –
siłę Coriolisa – jest to SIŁA POZORNA
działa w obracającym się układzie odniesienia!

$$\boxed{\vec{F}_C = 2m\vec{V} \times \vec{\omega}}$$

Przyspieszenie i siła Coriolisa

$$\boxed{\vec{F}_C = 2m\vec{V} \times \vec{\omega}}$$

Ciało wyrzucone w punkcie X, na półkuli północnej, pionowo w górę z prędkością **V**, doznaje przyspieszenia Coriolisa stycznego do równoleżnika przechodzącego przez punkt X.



Z kolei ciało poruszające się z prędkością styczną do równoleżnika przechodzącego przez punkt Y doznaje przyspieszenia Coriolisa skierowanego do środka Ziemi.

Siła Coriolisa - wnioski

Opisując ruch w układzie inercjalnym:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_r + 2m\vec{V}\times\vec{\omega} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{V}_r)$$

przysp. w ukł. inercjalnym	przysp. w ukł. obracającym się	Przyspieszenie Coriolisa	przyspieszenie dośrodkowe

Przykładowe zadania na siłę Coriolisa

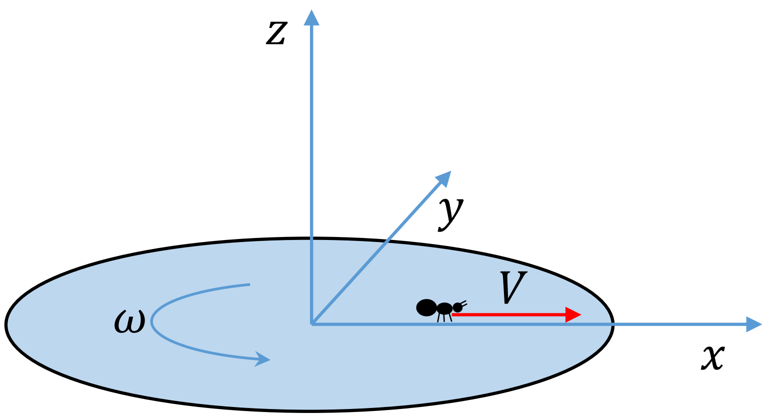
Dwaj myśliwi polowali na wilki. **A** strzelał do wilka znajdującego się na zachód od niego, **B** do wilka znajdującego się w kierunku południowym. Obydwaj spudłowali i tłumaczyli swoje niepowodzenia istnieniem siły Coriolisa. Który z nich miał większe prawo tak się tłumaczyć? Jaka jest wielkość odchylenia pocisku, jeżeli średnia prędkość v_0= 300m/s, czas lotu t = 1s a szerokość geograficzna
$\varphi = 49^0$.

ODP.: $\Delta x_A \approx 2{,}2$ cm $\Delta x_B \approx 1{,}7$ cm

Przykład

Zapisz w układzie nieinercjalnym, wektory wszystkich sił działających na mrówkę wędrującą po płycie gramofonowej z przykładu powyżej. Zapisz wektor wypadkowy tych sił.

- Siła grawitacji
- Siła reakcji
- Siła Coriolisa
- Siła odśrodkowa bezwładności
- Siła tarcia
- Siła boczna wywierana przez płytę na mrówkę.



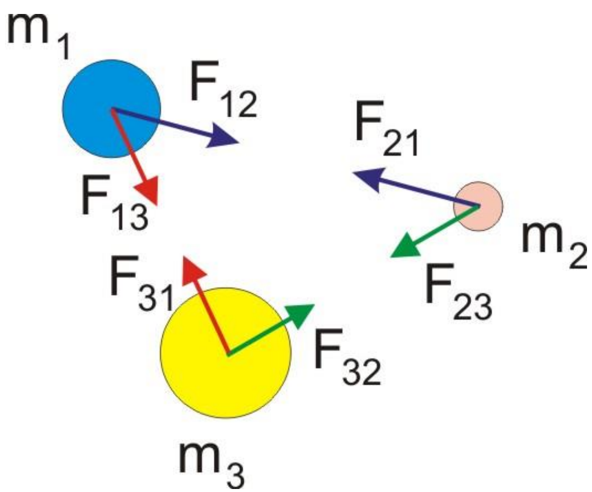
$$\overrightarrow{F_w} = -mg\hat{k} + mg\hat{k} - m2\omega V\hat{j} + mr\omega^2\hat{\imath} - \mu mg\hat{\imath} + F_s\hat{j} = 0$$

Podsumowanie

- Błędnym jest przekonanie, że do podtrzymania ruchu potrzebna jest siła (patrz zasada bezwładności – I zasada dynamiki Newtona)
- Pojęcia: ruch i spoczynek mają sens jedynie względem konkretnego układu odniesienia
- Zasady dynamiki obowiązują w układzie inercjalnym. W układach nieinercjalnych wprowadza się siły pozorne, aby móc nadal stosować zasady dynamiki
- Ziemia może być traktowana jak układ inercjalny, lecz są zjawiska, które mogą być wyjaśnione jedynie przy uwzględnieniu sił pozornych: odśrodkowej i Coriolisa

Dynamika układu punktów materialnych

- Zasady dynamiki Newtona dla układu punktów materialnych



$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 \qquad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}_3}{\mathrm{d}\,t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} \qquad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} \qquad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}_3}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{F}_{31} + \boldsymbol{F}_{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{31} + \boldsymbol{F}_{23} + \boldsymbol{F}_{32} = 0$$

Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ jest równa zeru, to całkowity wektor pędu układu pozostaje stały.

Zderzenia

zderzenia to szeroka klasa zjawisk np. :

- zderzenia kul bilardowych
- uderzenia piłki o ścianę
- oddziaływanie ładunków elektrycznych za pośrednictwem pola elektrycznego
- reakcje jądrowe
- rozpady cząstek

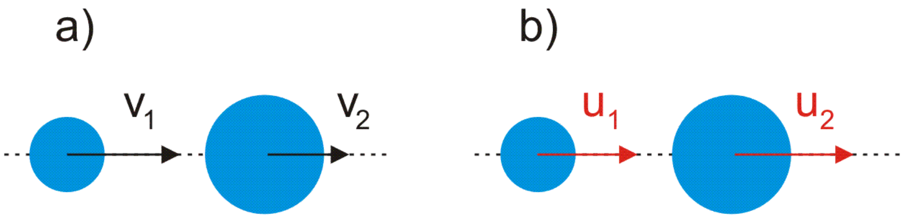
OpenStax CNX
(http://cnx.org)

Ze względu na krótki czas działania nie możemy zmierzyć sił działających podczas zderzenia. Jednak spełnione są:

- zasada zachowania pędu (występują tylko siły wewnętrzne)
- zasada zachowania energii całkowitej

Gdy dwa ciała zderzają się to zderzenie może być sprężyste (elastyczne) lub niesprężyste (nieelastyczne) w zależności od tego czy energia kinetyczna jest zachowana podczas tego zderzenia czy też nie.

Zderzenia w przestrzeni jednowymiarowej



centralne zderzenie sprężyste kul o masach m_1 i m_2

Z zasady zachowania pędu: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Z zasady zachowania energii kinetycznej: $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$

$$u_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

$$u_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

Szczególne przypadki:

- zderzenie identycznych ciał: $m_1 = m_2 = m \rightarrow u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$
- zderzenie lekkiej cząstki z ciężkim nieruchomym jądrem: $m_1 << m_2$, $v_2 = 0 \rightarrow u_1 = -v_1$, $u_2 = 0$
- ciężka cząstka uderza w lekką nieruchomą cząstkę: $m_1 >> m_2$, $v_2 = 0 \rightarrow u_1 = v_1$, $u_2 = 2v_1$

Dynamika układów o zmiennej masie

Ruch pod wpływem stałej siły *F* pojazdu o rosnącej masie.

(*m_0- masa początkowa)*

stały przyrost masy

$$\frac{dm}{dt} = \mu = const \qquad \Rightarrow \qquad m = m_0 + \mu \cdot t$$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$F = \frac{dm}{dt} v + m\frac{dv}{dt} = \mu \cdot v + \left(m_0 + \mu \cdot t\right)\frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu v = (m_0 + \mu t)\frac{dv}{dt}$$

rozdzielamy zmienne:

Dynamika układów o zmiennej masie

$$F - \mu v = (m_0 + \mu t)\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{F - \mu v} = \frac{dt}{m_0 + \mu t}$$

po scałkowaniu:

$$\int_0^v \frac{\mu dv}{F - \mu v} = \int_0^t \frac{\mu dt}{m_0 + \mu t} \Rightarrow -\ln(F - \mu v)\Big|_0^v = \ln(m_0 + \mu t)\Big|_0^t$$

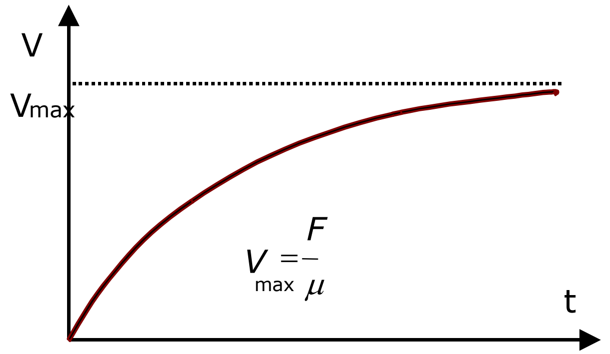
podstawiając granice:

$$-\ln(F - \mu v) + \ln F = \ln(m_0 + \mu t) - \ln m_0$$

$$\ln\frac{F}{F - \mu v} = \ln(\frac{m_0 + \mu t}{m_0}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F}{F - \mu v} = \frac{m_0 + \mu t}{m_0}$$

stąd ostatecznie:

$$v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t} \Rightarrow v = \frac{F}{\frac{m_0}{t} + \mu} \qquad \lim_{t \to \infty} v = \frac{F}{\mu}$$

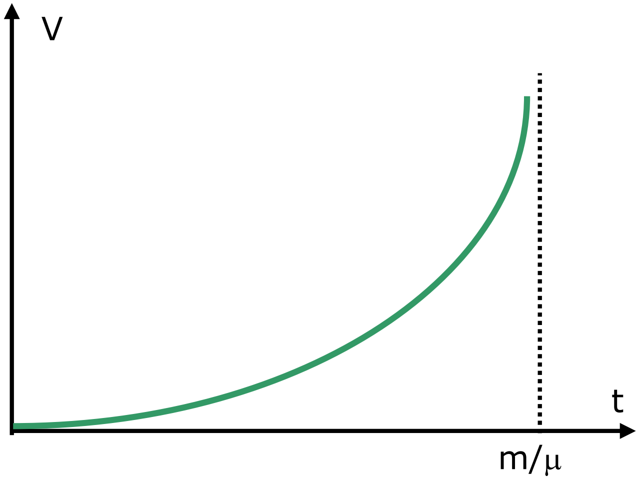


Dynamika układów o zmiennej masie

Ruch pod wpływem stałej siły, ciała o malejącej masie

Podobnie jak w poprzednim przypadku

$$F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow F = (m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt}$$



wynik:

$$v = \frac{F}{\mu}\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$

Zadanie

Rakieta o masie początkowej M_0 poruszając się w przestrzeni kosmicznej wyrzuca spalone paliwo w stałej ilości $dm_s/dt = r$ [kg/s], nadając mu względem rakiety prędkość U.

Zapisz zasadę zachowania pędu w nieruchomym układzie odniesienia (porusza się w nim rakieta), pamiętając, że w porównaniu z masą M rakiety w dowolnej chwili dt ilość wyrzuconych gazów dm jest do zaniedbania. jest do zaniedbania. Korzystając z zasady zachowania pędu:

a) Oblicz przyspieszenie początkowe rakiety.

b) Napisz równanie różniczkowe wiążące prędkość rakiety z jej zmienną masą V(m) i znajdź jego rozwiązanie zależne od czasu V(t).