Wykład 7

Bryła sztywna

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak

Środek masy

Jak opisać dowolny ruch ciała?

Którego punktu ciała?

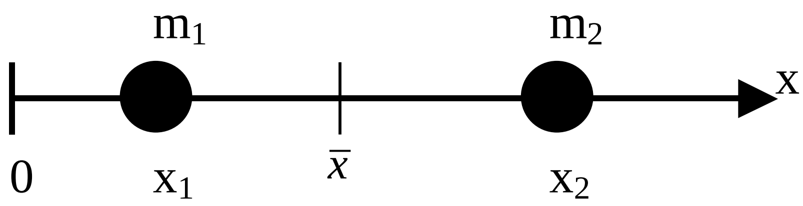
Zawsze można wybrać taki punkt ciała,

który porusza się tak jakby poruszał

się pojedynczy punkt materialny pod działaniem tych

samych sił zewnętrznych – *ŚRODEK MASY* ciała.

Dla układu punktów materialnych:



$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Przyczyny ruchu

Dla mas punktowych

$$\bar{x} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Ciągły rozkład mas

$$\bar{x} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$\bar{y} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$\bar{z} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm$$

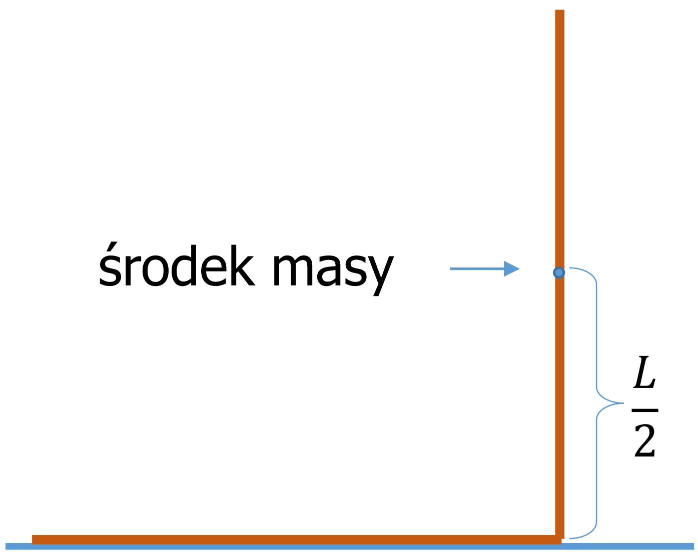
wektor położenia środka masy

$$\vec{r}_s = \hat{i}\bar{x} + \hat{j}\bar{y} + \hat{k}\bar{z} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_r = \frac{\int x dm + \int y dm + \int z dm}{M}$$

Przykład

- Cienki, jednorodny słup o masie M i długości L leżący poziomo postawiono pionowo. Obliczyć wykonaną pracę.



$$W = mg\frac{L}{2}$$

Ruch środka masy

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$M \cdot \vec{r}_S = m_1 \cdot \vec{r}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{r}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \qquad \Big| dt$$

$$M \cdot \vec{v}_S = m_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{v}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i \qquad \Big| dt$$

$$M \cdot \vec{a}_S = m_1 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{a}_n = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$$

$$M \cdot \vec{a}_S = \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i$$

Ruch środka masy odbywa się pod wpływem wektorowej sumy wszystkich sił działających na układ - również sił wewnętrznych.
Jednak z III zasady dynamiki $\Rightarrow$ siły wewnętrzne się równoważą

$$M \cdot \vec{a}_s = \vec{F}_{zew}$$

Ruch środka masy

- Środek masy układu porusza się tak, jakby cała masa układu była skupiona w środku masy i jakby wszystkie siły zewnętrzne na nią działały.
- Pęd środka masy

$$\vec{p}_s = M \cdot \vec{V}_s \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_s}{dt} = M\frac{d\vec{V}_s}{dt} = \vec{F}_{zew}$$

$$\vec{F}_{zew} = 0 \Longrightarrow \frac{d\vec{p}_s}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \vec{p}_s = const$$

Zasada zachowania pędu

Przykład:
Siedzący na dziobie canoe o masie m i długości L wioślarz o masie M wstał i przeszedł z szybkością V_w na jego drugi koniec. Oblicz z jaką szybkością i o ile przesunęło się canoe.

przesunięcie $a = \dfrac{M \cdot L}{M + m}$ szybkość $V_c = \dfrac{V_w \cdot a}{L - a}$

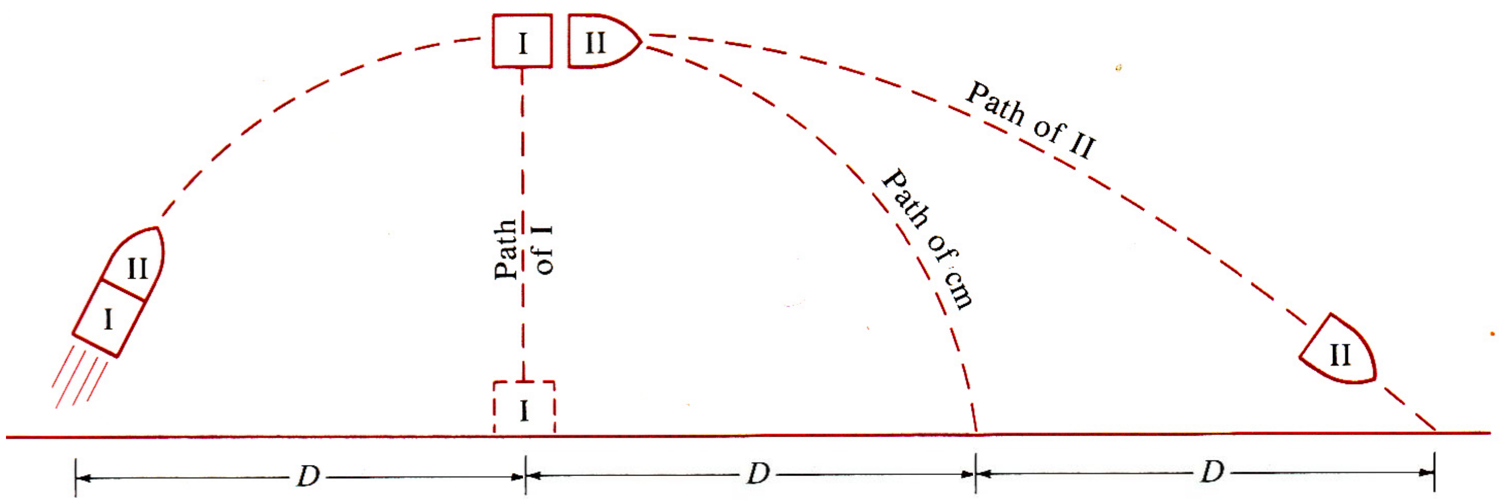
Ruch środka masy

Gdy rzucimy kij baseballowy środek masy porusza się po torze parabolicznym a tory wszystkich innych punktów kija są znacznie bardziej złożone. Pęd środka masy

HR tom.1

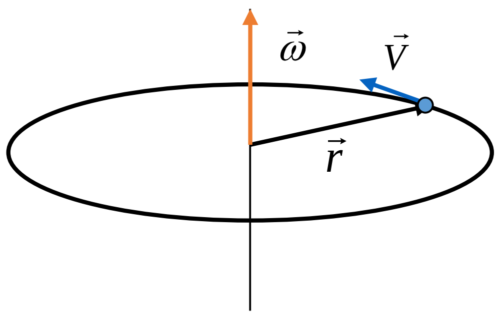
Ruch środka masy

Przykład:
Wystrzelona po torze parabolicznym rakieta w najwyższym punkcie toru rozpada się na dwie równe części. Jedna z nich spada pionowo na powierzchnię Ziemi, a druga porusza się dalej. Przedyskutuj ten przypadek oraz narysuj:
A. Dalszy tor środka masy obu części rakiet,
B. Tor drugiej części rakiety.
C. W jakiej odległości od miejsca startu wyląduje druga część rakiety?



Ruch obrotowy – moment pędu

- Odpowiednikiem pędu w ruchu postępowym jest moment pędu w ruchu obrotowym



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Skoro $\vec{r} \perp \vec{p}$ to $L = r \cdot mV$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Skoro $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ oraz $\omega \parallel \vec{L}$

to $V = \omega \cdot r$ oraz $L = r^2 m\omega$

W ruchu postępowym siłę wiążemy z liniowym przyspieszeniem ciała.
Jaką wielkość zwiążemy z przyspieszeniem kątowym w ruchu obrotowym ?

Ruch obrotowy – moment siły

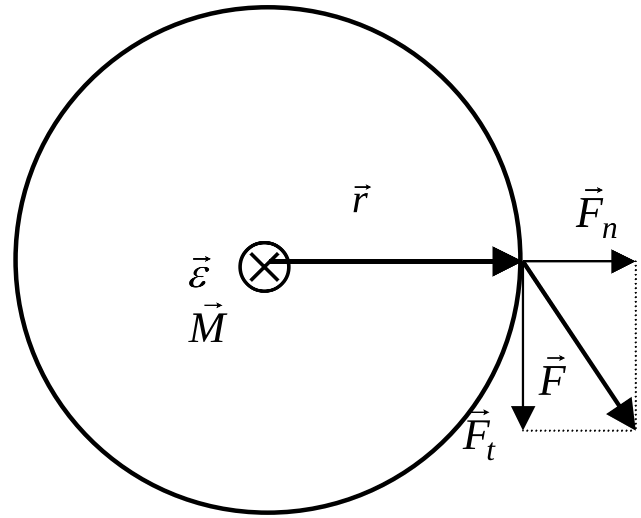
$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Jeżeli $\vec{r} \perp \vec{F}$ to $M = r \cdot F$

$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ oraz $\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}$

to $M = r^2 m \varepsilon \quad \Rightarrow \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right) = \vec{r} \times \vec{F}_t + 0$$



Moment siły w tym ruchu nadaje siła styczna.

Ruch obrotowy – moment siły

Równanie ruchu obrotowego

Jeżeli zmienia się moment pędu układu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \neq const$

to działa moment siły $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \quad \Rightarrow \vec{M} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)$

czyli $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \underbrace{\left(\vec{v} \times m \cdot \vec{v}\right)}_{0} + \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \neq 0$

Ostatecznie: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Zasada zachowania momentu pędu.

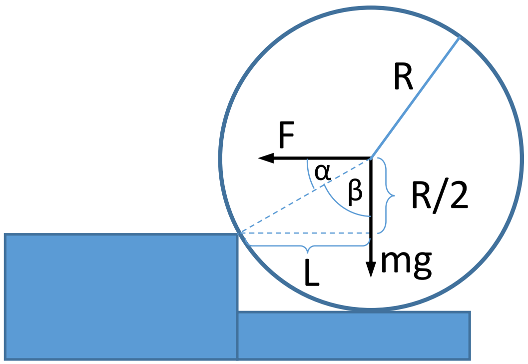
Jeżeli $\vec{L} = const$ to $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{zew} = 0$

Ruch obrotowy – moment siły

Przykład:

Stojący pionowo dysk o masie m opiera się o schodek o wysokości równej połowie promienia dysku.
Na oś dysku działa poziomo siła F aby wtoczyć dysk ruchem jednostajnym na schodek. Obliczyć wartość tej siły.

Rozwiązanie:



Dysk wtacza się na schodek $\rightarrow$ $\vec{M} = \vec{M}_F + \vec{M}_g$

$$\vec{M}_F = \vec{R} \times \vec{F} \qquad M_F = R \cdot F \cdot \sin\alpha = R \cdot F \cdot \frac{1}{2}$$

Przeciwdziała moment siły grawitacji $\vec{M}_g = \vec{R} \times m\vec{g}$

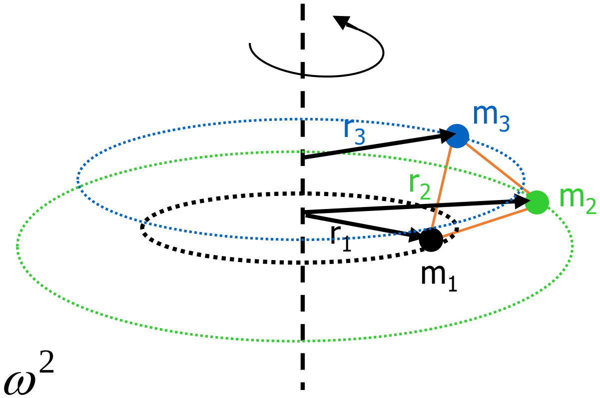
$$M_g = R \cdot mg \cdot \sin\beta = R \cdot mg \cdot \sin(90 - \alpha) = R \cdot mg \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{L}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R} \qquad R \cdot F \cdot \frac{1}{2} = R \cdot mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad F = mg \cdot \sqrt{3}$$

Ruch obrotowy – moment bezwładności

Energia kinetyczna *i*-tego punktu materialnego:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$$



Energia układu punktów materialnych obracających się z taką samą ω

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2\right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_i m_i \cdot r_i^2}_{I}\right) \cdot \omega^2$$

$$\boxed{I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \qquad \left[kg \cdot m^2\right]}$$

Dla ciągłego rozkładu mas

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

Moment bezwładności zależy od:
- wyboru osi obrotu
- kształtu ciała
- rozmieszczenia masy ciała

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \cdot r_i^2\right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

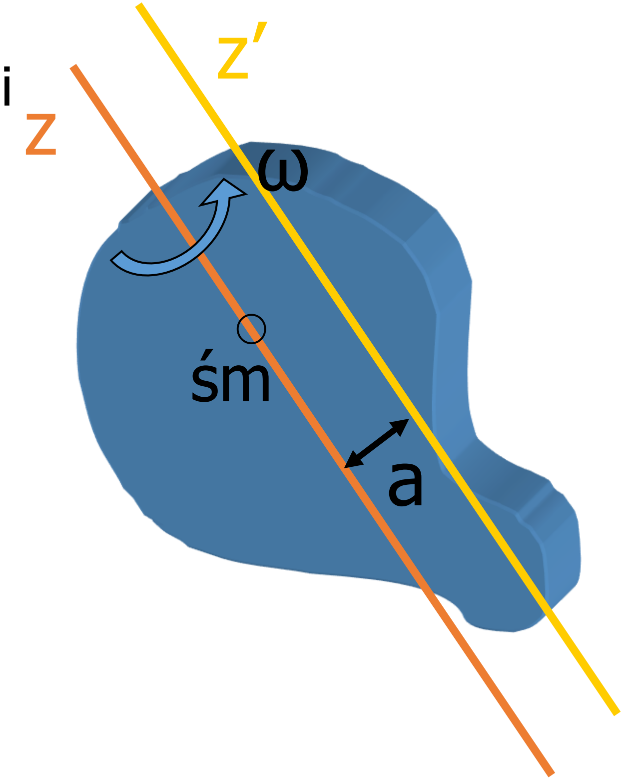
Twierdzenie Steinera (o osiach równoległych)

Gdy obrót bryły o masie *M* następuje wokół osi Z przechodzącej przez środek masy to

$$I_z = I_0$$

Jeżeli bryła zacznie się obracać wokół osi Z′, równoległej do Z i oddalonej od niej o odległość *a* to

$$I_{z'} = I_0 + Ma^2$$

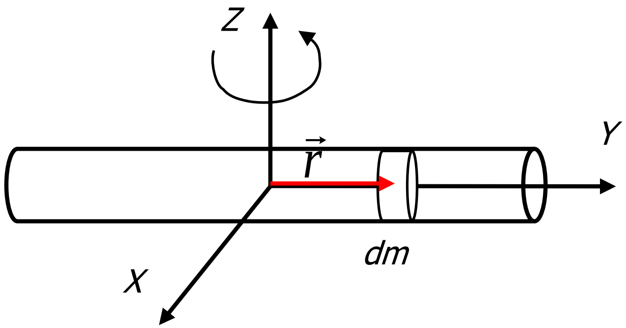


Przykład

Toczenie się bez poślizgu walca można traktować jako obrót wokół chwilowej osi obrotu – punktu styczności z podłożem.

Liniowy rozkład masy

Cienki jednorodny pręt o długości l i gęstości liniowej obraca się wokół osi OZ



$$I_{yy} = 0$$

oraz $$I_{xx} = I_{zz} = \int r^2 dm$$

$$I_{zz} = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \lambda \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{3}\frac{m}{l}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right)$$

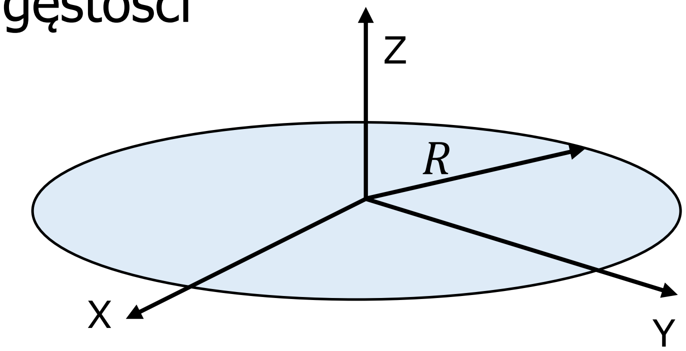
czyli $$I_{zz} = \frac{m}{3l}\frac{2l^3}{8} = \frac{ml^2}{12}$$

Moment bezwładności względem końca z twierdzenia Steinera:

$$I_k = I_0 + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m\frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

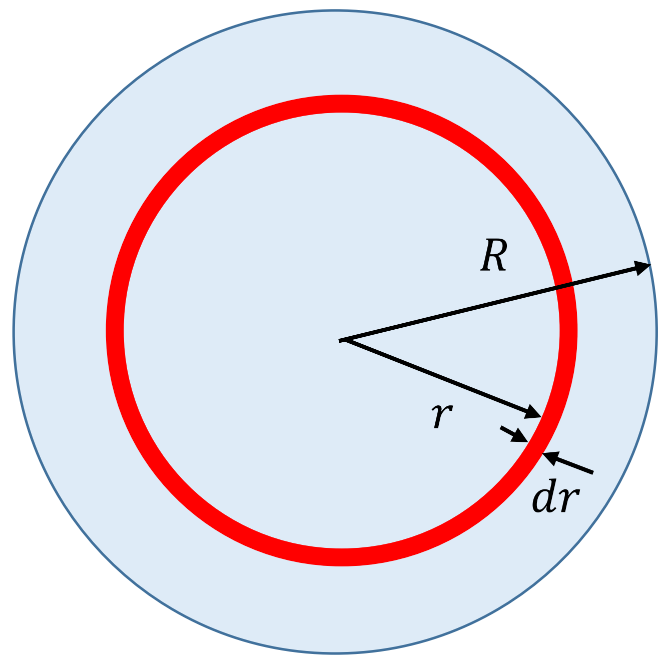
Powierzchniowy rozkład masy

Cienki jednorodny dysk o promieniu *R* i gęstości powierzchniowej $\sigma = \frac{dm}{ds}$



$$I_{xx} = I_{yy}$$

$$I_{zz} = \int r^2 dm \qquad dm = \sigma \cdot ds. = 2\pi \cdot r \cdot dr$$

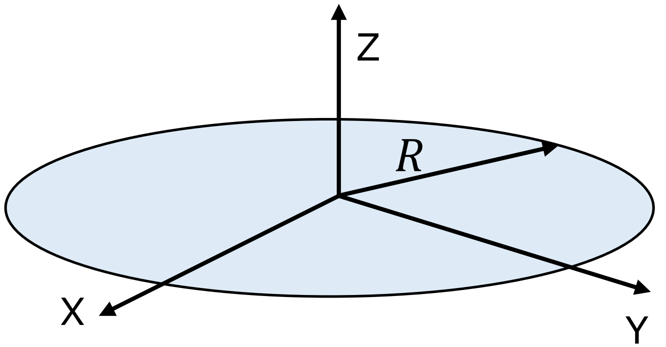


więc

$$I_{zz} = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{mR^2}{2}}$$

Powierzchniowy rozkład masy

Moment bezwładności różni się w
zależności od wybranej osi obrotu



Dla ciągłego rozkładu masy:

$$\boxed{I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\int r^2\, dm}$$

Dla dysku:

$$I_{xx} = I_{yy}$$

więc

$$2I_{xx} + I_{zz} = 2\int r^2\, dm$$

ale już policzone

$$I_{zz} = \int r^2\, dm = \frac{MR^2}{2}$$

$$2I_{xx} = 2I_{zz} - I_{zz}$$

$$2I_{xx} = I_{zz}$$

$$I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2}$$

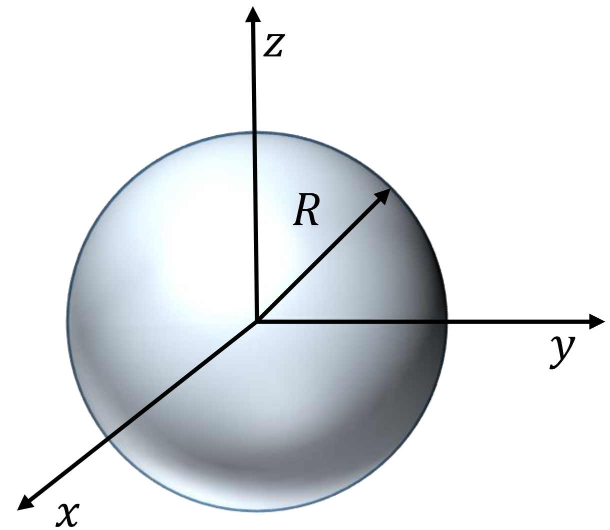
$$\boxed{I_{xx} = I_{yy} = \frac{MR^2}{4}}$$

Powierzchniowy rozkład masy

Gęstość powierzchniowa powłoki o promieniu *R*

wynosi $\sigma = \dfrac{dm}{ds}$

Skoro jest symetria kulista to:



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\int R^2\, dm$$

$$3I_{xx} = 2R^2 \int dm$$

$$3I_{xx} = 2R^2 M$$

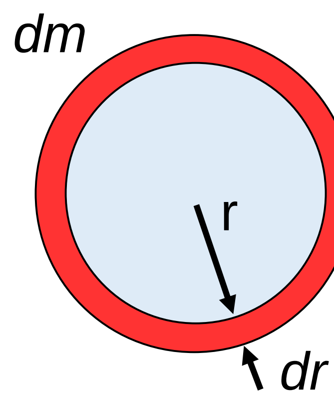
$$\boxed{I = \frac{2}{3} M R^2}$$

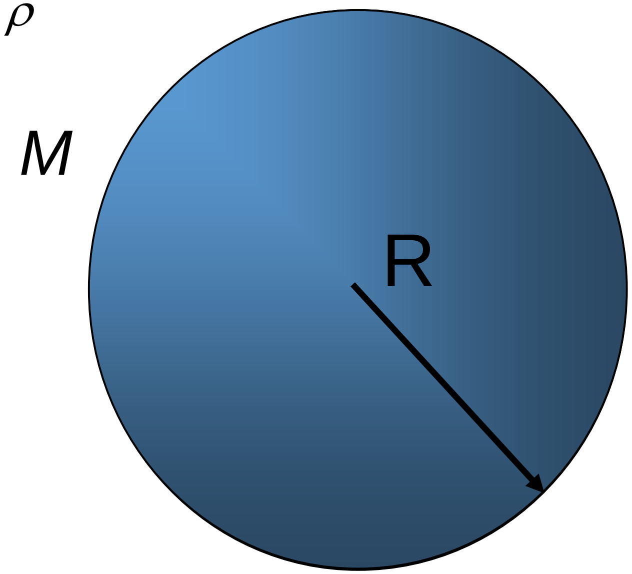
Objętościowy rozkład masy

Kula o promieniu R i gęstości objętościowej ρ

$$I_{sfery} = \frac{2}{3} R^2 M$$

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm \qquad I = \int dI$$





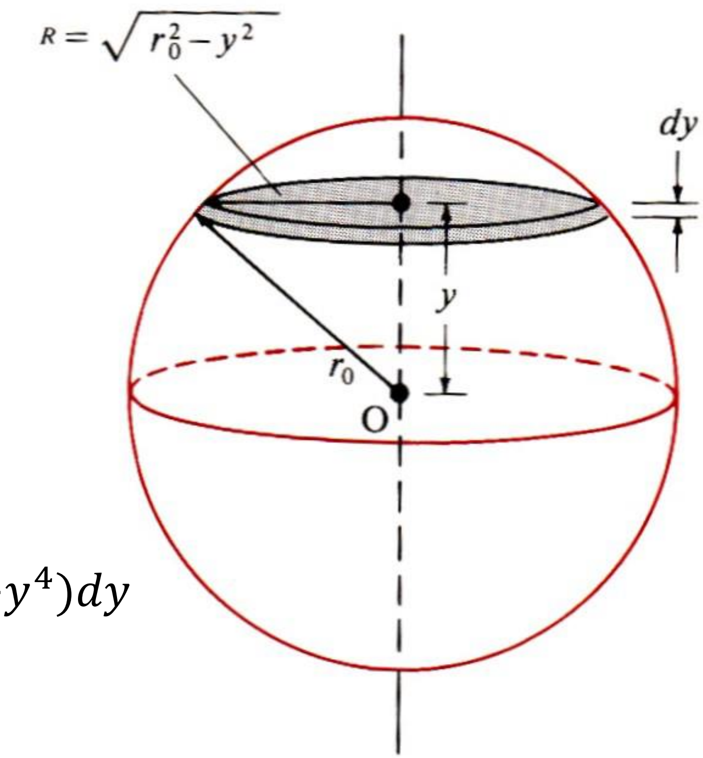
$$I = \int \frac{2}{3} r^2 dm = \int \frac{2}{3} r^2 \rho dV$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$I = \int_0^R \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{8\pi}{15} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} R^5 = \boxed{\frac{2}{5} M R^2}$$

Objętościowy rozkład masy

Inny sposób obliczeń



Kulę o promieniu r_0 składamy z plastrów o bieżącym promieniu *R* i grubości *dy*:

$$dm = \rho dV = \rho\pi R^2 dy = \rho\pi(r_0^2 - y^2)dy$$

$$dI = \frac{1}{2} dm R^2 = \frac{\rho\pi}{2} R^2 R^2 dy = \frac{\rho\pi}{2}(r_0^4 - 2r_0^2 y^2 + y^4)dy$$

$$I = \int dI = \int_{-r_0}^{r_0} \frac{\rho\pi}{2}(r_0^4 - 2r_0^2 y^2 + y^4)dy = \frac{8}{15}\rho\pi r_0^5$$

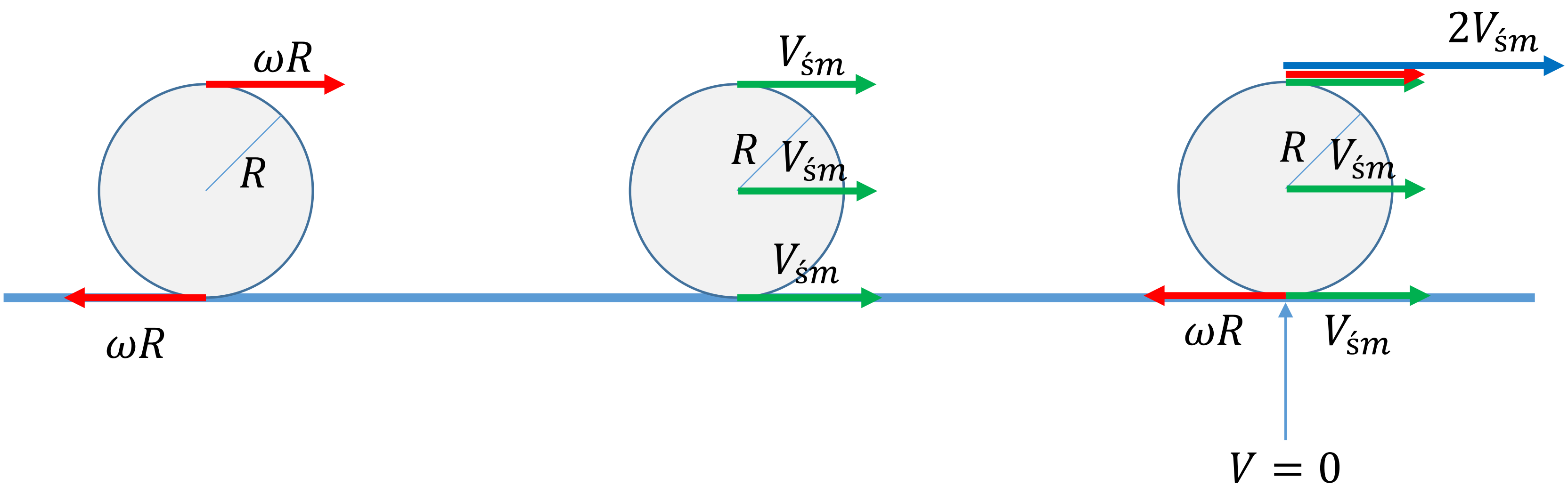
$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \longrightarrow \boxed{I = \frac{2}{5} M r_0^2}$$

Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu jest specyficznym rodzajem ruchu bryły sztywnej, będącym złożeniem ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy.

Przyczyną toczenia jest występowanie tarcia statycznego.

Toczenie bez poślizgu



ruch obrotowy wokół osi przechodzącej przez środek masy

ruch postępowy

toczenie bez poślizgu jako złożenie ruchów

$$V_{śm} = \omega R$$

$$a_{śm} = \varepsilon R$$

Energia toczącego się ciała

energia kinetyczna ruchu postępowego + energia kinetyczna ruchu obrotowego = energia kinetyczna całkowita

E_{kp} $\quad$ E_{ko} $\quad$ E_{kc}

$$E_{kp} = \frac{mV_{śm}^2}{2}$$

$$E_{ko} = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_{kc} = E_{kp} + E_{ko}$$

$$V_{śm} = \omega R$$

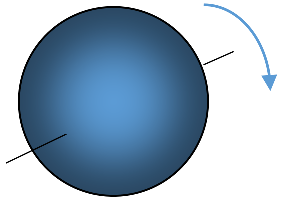
$$E_{kc} = \frac{mV_{śm}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_{kp} = \frac{mR^2\omega^2}{2}$$

$$E_{kc} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Całkowita energia kinetyczna toczącego ciała

kula

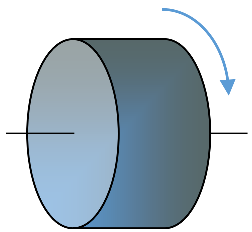


$$I_k = \frac{2}{5} mR^2$$

$$E_{kk} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{2mR^2}{5}\cdot\frac{\omega^2}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{10}\right) mR^2\omega^2 = \frac{7}{10} mR^2\omega^2 = \frac{7}{10} mV^2$$

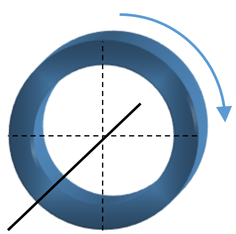
walec



$$I_w = \frac{1}{2} mR^2$$

$$E_{kw} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4} = \frac{3}{4} mV^2$$

obręcz



$$I_o = mR^2$$

$$E_{ko} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = mV^2$$

$$E_{kk} < E_{kw} < E_{ko}$$

Energia kinetyczna toczącego się koła

Oś obrotu w środku koła

$$E_{kc} = E_{kp} + E_{ko}$$

$$E_{kp} = \frac{mV_{śm}^2}{2} \qquad E_{ko} = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$I_O = \frac{1}{2}mR^2$$

$$E_{kc} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4} = \frac{3}{4}mV^2$$

Chwilowa oś obrotu

Moment bezwładności z twierdzenia Steinera:

$$I_P = I_O + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$E_{ko} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3}{2}mR^2\frac{\omega^2}{2} = \frac{3}{4}mV^2$$

Energia kinetyczna – chwilowa oś obrotu

Oś obrotu w środku

Chwilowa oś obrotu

kula:

Moment bezwładności z twierdzenia Steinera:

$$I_k = \frac{2}{5}mR^2$$

$$I_P = I_O + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

$$E_{ko} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{7}{5}mR^2\frac{\omega^2}{2} = \frac{7}{10}mV^2$$

obręcz:

$$I_o = mR^2$$

$$I_P = I_O + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

$$E_{ko} = mV^2$$

Toczenie po równi pochyłej – równania ruchu

- względem środka masy

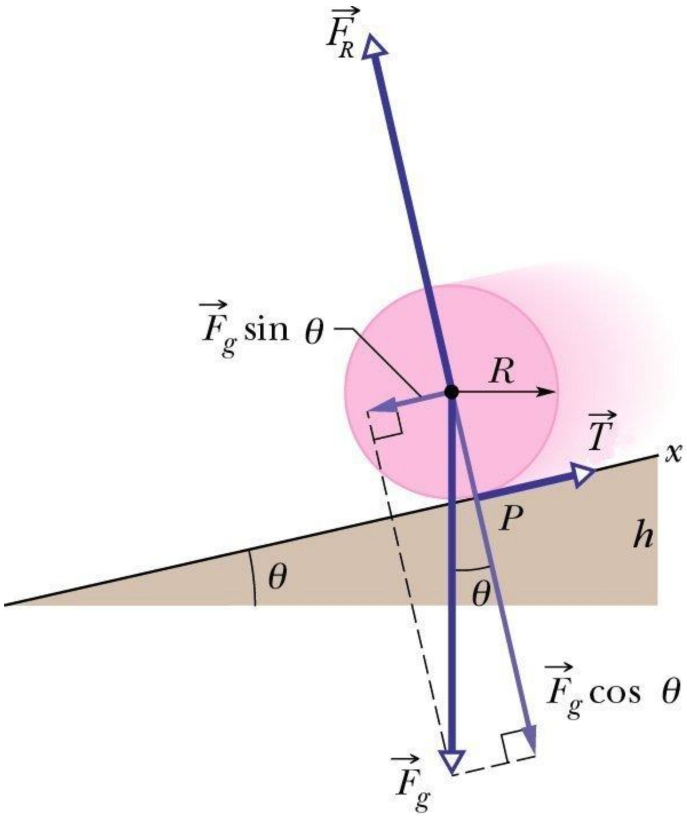
ruch postępowy

$$F_R - mg\cos\theta = 0$$

$$mg\sin\theta - T = ma$$

ruch obrotowy

$$\tau = I_{śr.m.}\alpha = I_{śr.m.}\frac{a}{R}$$



Toczenie bez poślizgu $RT = I_{śr.m.}\dfrac{a}{R}$

np. dla walca $a = \dfrac{2}{3}g\sin\theta$

- względem chwilowej osi obrotu (punkt P)

tylko ruch obrotowy $\tau = I_P\alpha = I_P\dfrac{a}{R}$

względem punktu P $R\,mg\sin\theta = I_P\dfrac{a}{R}$

dla walca $a = \dfrac{2}{3}g\sin\theta$

Toczenie po równi pochyłej – ZZE

- względem środka masy

ruch postępowy

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m v_{śr.m.}^2$$

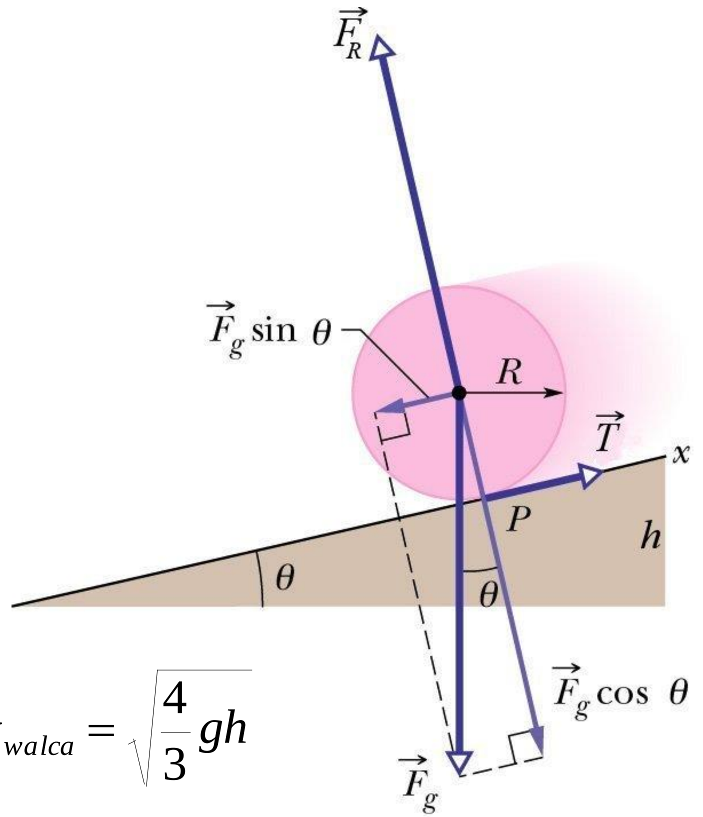
ruch obrotowy

$$E_{ko} = \frac{1}{2} I_{śr.m.} \omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{śr.m.}^2 + \frac{1}{2} I_{śr.m.} \omega^2$$

Toczenie bez poślizgu $\omega = \frac{v}{R}$

np. dla walca $v_{walca} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$



- względem chwilowej osi obrotu (punkt P)

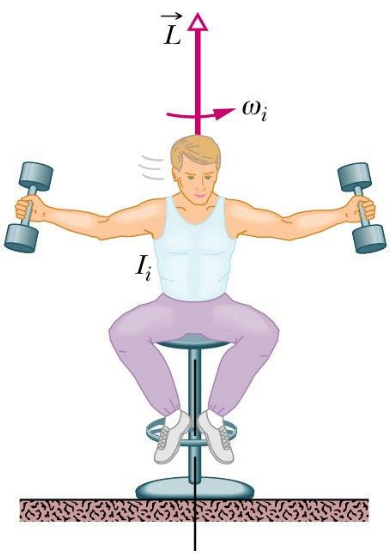
tylko ruch obrotowy $E_{ko} = \frac{1}{2} I_p \omega^2$ $\quad mgh = \frac{1}{2} I_P \omega^2$ $\quad v_{walca} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$

Zasada zachowania momentu pędu

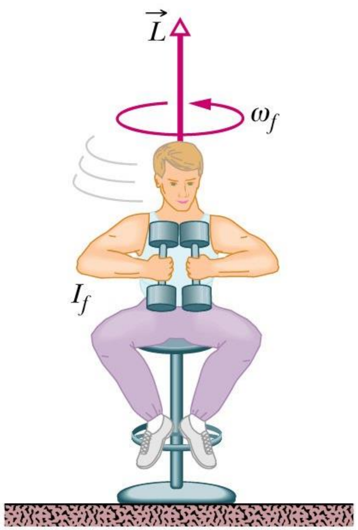
W układzie inercjalnym wypadkowy moment sił:

$$\vec{M}_{zew} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ jest równy zmianie momentu pędu bryły sztywnej

Jeżeli $\vec{M}_{zew} = 0$ to $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ czyli $\vec{L} = const$



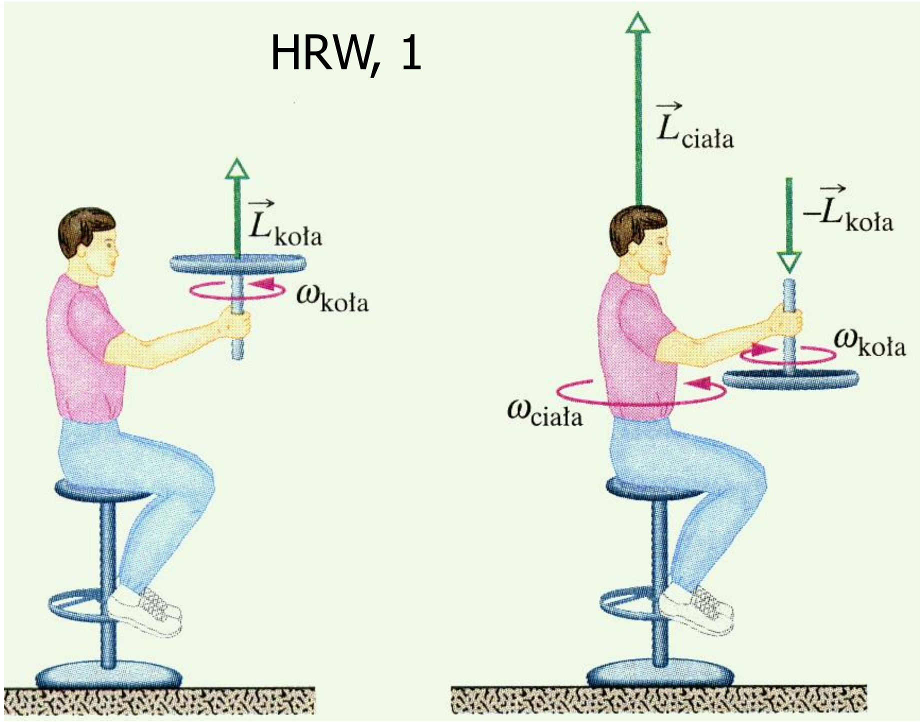
$$L = I\omega$$



Przykład

Na rysunku przedstawiono studenta siedzącego na stołku obrotowym. Student pozostaje w spoczynku, trzymając w ręku koło rowerowe, które ma moment bezwładności I_k=1.2 kg·m^2 względem swojej osi. Koło obraca się z prędkością kątową ω_k = 3.9 obrotów/s. W pewnej chwili student obraca koło w wyniku czego student, stołek i środek masy koła zaczynają się obracać razem wokół osi obrotu stołka. Moment bezwładności tego ciała złożonego wynosi I_c=6,8 kg ·m2.

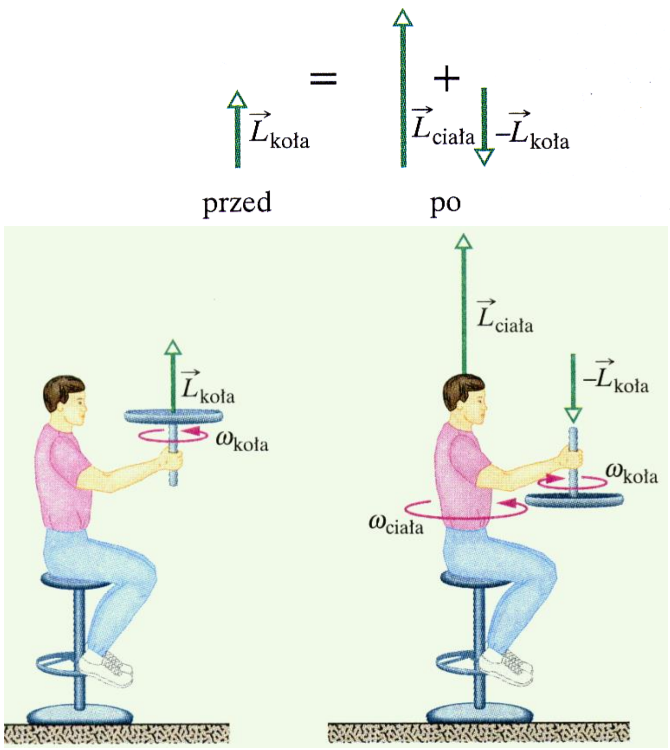
Obliczyć prędkość kątową $\omega_{ciała}$ po obróceniu koła.
W jakim kierunku obraca się student wraz z kołem?



Przykład

Rozwiązanie

Z zasady zachowania momentu pędu:



$$\vec{\mathbf{L}}_{przed} = \vec{\mathbf{L}}_{po}$$

$$L_k = L_c - L_k$$

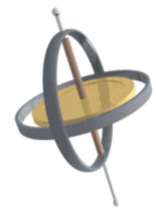
$$L_c = 2L_k$$

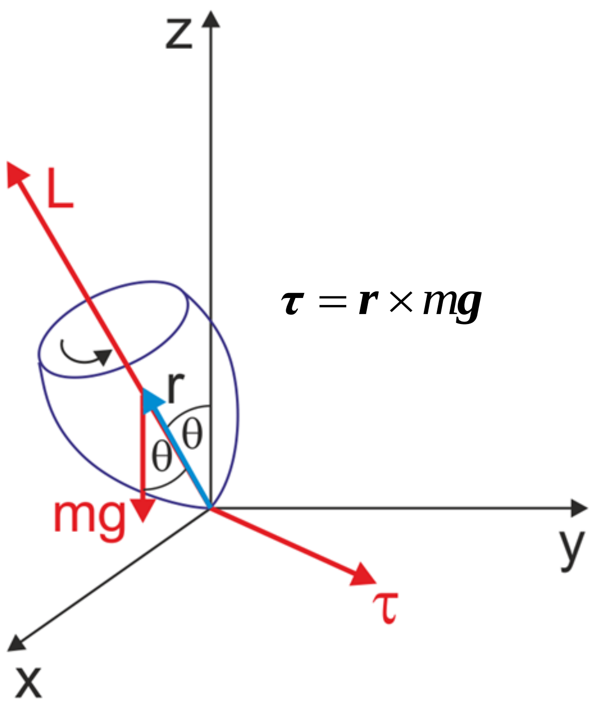
$$\omega_{ciał} I_c = 2\omega_k I_k$$

$$\omega_{ciał} = 2\omega_k \frac{I_k}{I_c}$$

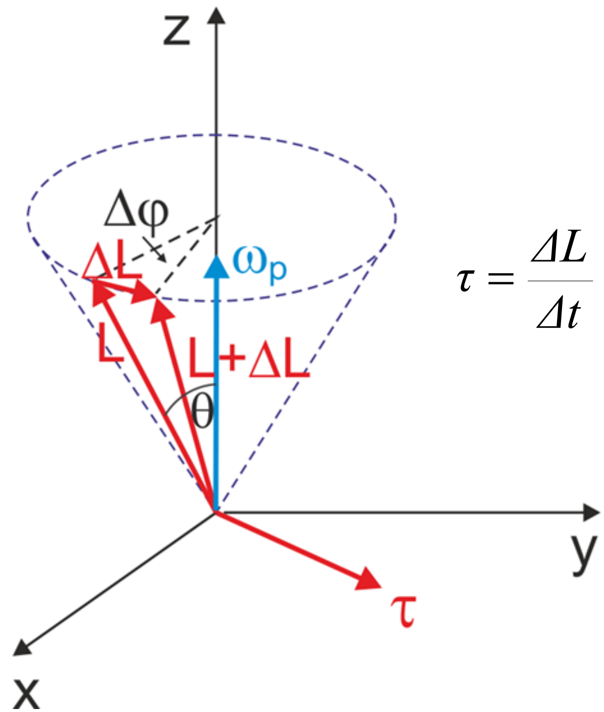
Precesja

Skomplikowany ruch bo oś obrotu nie jest nieruchomą
w inercjalnym układzie odniesienia





$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g}$$



$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$\omega_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cong \frac{\Delta L}{L\sin\theta}\frac{1}{\Delta t} = \frac{\tau}{L\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \tau = \omega_p L \sin\theta \qquad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{L}$$

Ruch postępowy a ruch obrotowy

Ruch postępowy (stały kierunek)			**Ruch obrotowy (stała oś obrotu)**		
Położenie	x	$[m]$	Położenie kątowe	α	$[rad]$
Prędkość liniowa	$V = \frac{dx}{dt}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Prędkość kątowa	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
Przyspieszenie liniowe	$a = \frac{dV}{dt}$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	$\left[\frac{rad}{s^2}\right]$
Masa	m	$[kg]$	Moment bezwładności	I	$[kg \cdot m^2]$

Ruch postępowy a ruch obrotowy

Ruch postępowy (stały kierunek)			**Ruch obrotowy (stała oś obrotu)**		
Siła	$\vec{F} = m\vec{a}$	$[N]$	Moment siły	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$	$[Nm]$
Pęd	$\vec{p} = m\vec{V}$	$\left[kg\frac{m}{s}\right]$	Moment pędu	$\vec{L} = I\vec{\omega}$	$\left[kg\frac{m^2}{s}\right]$
Energia kinetyczna	$E_k = \frac{mV^2}{2}$	[J]	Energia kinetyczna	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$	[J]
Uogólniona zasada dynamiki	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$[N]$	Uogólniona zasada dynamiki	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$[Nm]$