

1. a) Prom kursuje pomiędzy przystaniami leżącymi naprzeciwko siebie po obu stronach rzeki o szerokości 40 m, która płynie z prędkością 3 m/s. Ile trwa przeprawa przez rzekę jeżeli na stojącej wodzie prędkość promu wynosi 5 m/s ?
b) Łódź napędzana silnikiem porusza się na stojącej wodzie z prędkością 4 m/s. Jaka jest prędkość łodzi gdy przepływa ona przez rzekę, której prąd ma prędkość 3 m/s, sterując cały czas prostopadle do kierunku prądu? Jaka może być maksymalna prędkość łodzi płynącej po tej rzece ?
2. W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są dwa wektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ oraz $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, gdzie $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ są wersorami osi tego układu. Znaleźć:
a) długość każdego wektora,
b) iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,
c) kąt zawarty między nimi,
d) sumę i różnicę wektorów: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
3. Dane są wektory $\mathbf{A} = [1, 2, 3]$, $\mathbf{B} = [-2, -1, 3]$. Obliczyć ich sumę $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, różnicę $\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, iloczyny skalarne $c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ i $d = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ oraz wektorowe $\mathbf{W} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ i $\mathbf{V} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$.
4. Dane są wektory $\mathbf{A} = (3, y, z)$; $\mathbf{B} = (1, 3, -2)$ oraz $\mathbf{C} = (2, -4, 1)$.
a) Obliczyć y i z tak, by wektor $\mathbf{A}$ był prostopadły do wektorów $\mathbf{B}$ oraz $\mathbf{C}$.
b) Obliczyć jaki kąt tworzą wektory $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$?
5. Wektor wodzący punktu jest określony wzorem: $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$, obliczyć:
a) wektor prędkości w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili $t = 2$ s,
b) wektor przyspieszenia w funkcji czasu oraz jego wartość liczbową w chwili $t = 2$ s,
c) kąt między wektorami przyspieszenia i prędkości w chwili $t = 2$ s.
d) Jaki jest tor ruchu punktu? Jakim ruchem poruszają się rzuty punktu na osie układu współrzędnych OX, OY, OZ?
6. Siła $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ zaczepiona do pewnego ciała w punkcie P (4,2,1) powoduje jego obrót wokół punktu R (1, -1, 1).
a) Oblicz wektor ramienia działającej siły.
b) Oblicz jaki kąt tworzy wektor siły z ramieniem siły.
c) Oblicz wartość momentu siły działającej na ciało.
7. Wektor położenia ciała o masie $m = 2$ kg dany jest jako $\mathbf{R}(t) = 5\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$. Oblicz pracę wykonaną przez siłę poruszającą to ciało: a) w ciągu trzech pierwszych sekund jego ruchu, b) w ciągu trzeciej sekundy jego ruchu.
8. Obliczyć wektor prędkości i przyspieszenia dla wektora wodzącego $\mathbf{r} = r \cos(\omega t + \varphi_0) \mathbf{i} + r \sin(\omega t + \varphi_0) \mathbf{j}$, gdzie r , ω , φ_0 są stałe. Wykazać za pomocą odpowiednich obliczeń jaki to jest ruch.
9. Na ciało działa siła o następujących składowych: $F_x = 3(x^2 - y)$, $F_y = 2$. Siła przesuwając punkt materialny wzdłuż boków trójkąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach: A(0,0), B(0,2), C(3,0). Oblicz pracę wykonaną przez siłę F przy przesuwaniu punktu z $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$.