ABC rachunku całkowego

Dr inż. Zbigniew Szklarski

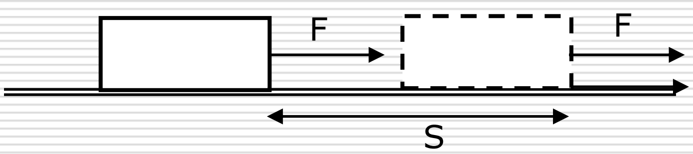
Katedra Elektroniki, paw. C-1, pok.321

szkla@agh.edu.pl

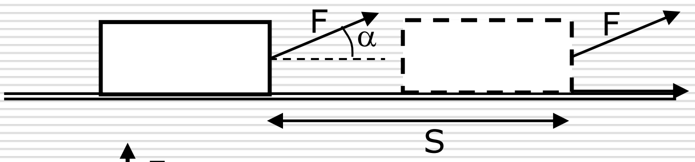
http://layer.uci.agh.edu.pl/Z.Szklarski/

To już wiecie….

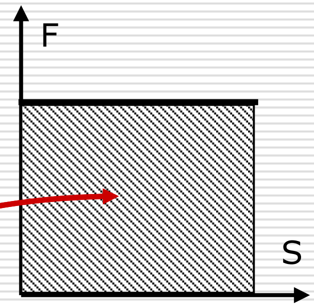
$$W = F \cdot S \quad \rightarrow$$



$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha \quad \rightarrow$$



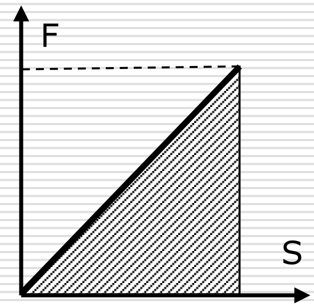
Założenie: ***F = const !!***



Miarą pracy jest pole

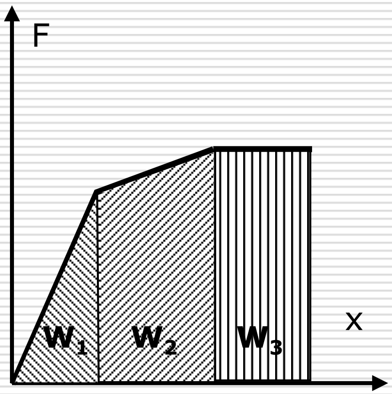
Co w sytuacji gdy *F* – zmienne?

$$W = F_{śr} \cdot S$$



$$W = \frac{1}{2} F \cdot S$$

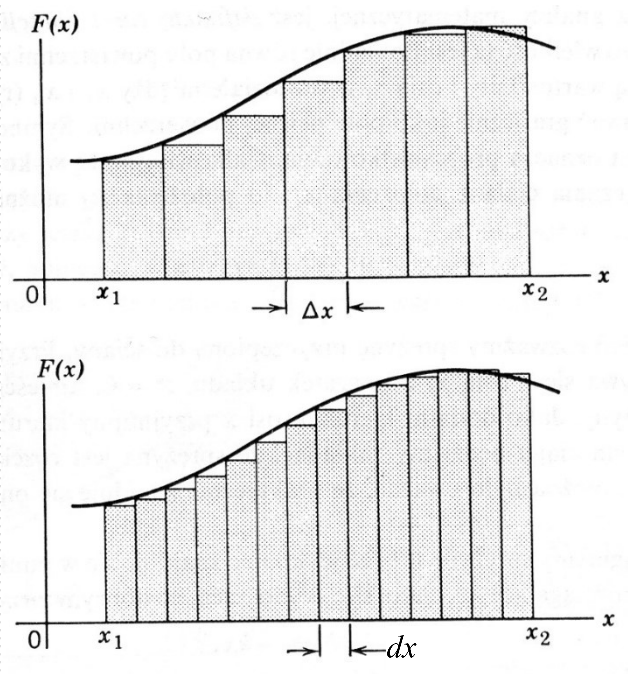
Ale co zrobić gdy F jest zmienne niejednostajnie



$$W = \sum_i W_i = W_1 + W_2 + W_3$$

a jeżeli $\Delta x \rightarrow 0$ to

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$



wtedy $dW = F \cdot dx$ $\quad W = \int dW = \int F \cdot dx$

W ogólnym przypadku: $W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$

$$\int dS(t) = S(t)$$

wynik całkowania to taka funkcja, której pochodna jest pod całką.

dS(t) – różniczka funkcji pierwotnej *S(t)*

ale: $\int dS(t) = S(t) + C$

Podstawowe wzory:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\int 0dx = C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int cosxdx = sinx + C$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsinx + C$$

$$\int sinxdx = -cosx + C$$

Przykłady

- Zadanie 1.

Na ruszające z miejsca z położenia x_0 i poruszające się prostoliniowo ciało masie m działa stała siła F. Obliczyć zależność energii kinetycznej ciała w funkcji przebytej drogi.

Rozwiązanie

$F = m \cdot a = m\frac{dv}{dt}$ $\quad Fdt = mdv \quad$ $v = \frac{dS}{dt} \rightarrow dt = \frac{dS}{v}$ a zatem

$\frac{FdS}{v} = mdv \quad FdS = mvdv \quad \int FdS = \int mvdv \quad F \cdot S = m\frac{v^2}{2} + C$

$dla\ t = 0 \rightarrow v = 0;\ \ S = x_0 \quad F \cdot x_0 = 0 + C$

$E_k = F \cdot S - \mathrm{C}$ $\quad \boxed{E_k = F(S - x_0)}$

Zadanie 2.

Na ruszające z miejsca i poruszające się prostoliniowo ciało działa siła *F = 2x² – 3x + 1* [N]. Obliczyć jaką pracę wykonuje ta siła na pierwszym metrze drogi.

Rozwiązanie

$$W = \int F(x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)dx$$ a zatem

$$W = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = ... \quad = \quad \frac{1}{6}J$$

Zadanie 3.

Prędkość kuli o masie *m* = ½ kg poruszającej się prostoliniowo jest zależna od czasu w następujący sposób:

V(t) = 2-½ t^2 [m/s].

A) Oblicz średnią szybkość kuli.

Rozwiązanie:

$$V_{sr} = \frac{S_{calk}}{t_{calk}}$$

- jak długo poruszała się kula?

$$V = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{2}t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2s$$

- jaką drogę przebyła w tym czasie?

$$V(t) = \frac{dS}{dt} \quad \Rightarrow \quad dS = V(t)dt \quad \Rightarrow \quad S = \int_0^2 V(t)dt$$

$$S = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)dt = 2t - \frac{1}{6}t^3 \Big|_0^2 = \ldots \quad \frac{8}{3}m$$

a zatem $V_{sr} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = 1\frac{1}{3} m/s$

B) Podaj równanie siły hamującej działającej na kulę

Rozwiązanie:

$$F = m \cdot a \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d\left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)}{dt} = -t \qquad \Rightarrow \qquad F = -\frac{1}{2}t \qquad [N]$$

C) Oblicz całkowitą pracę wykonaną przez siłę hamującą

Rozwiązanie:

ponieważ *F≠const* $\quad W = \int F(t)\ dS$ **!!!!** tego nie można scałkować!

ale $\quad V(t) = \frac{dS}{dt} \quad \Rightarrow \quad dS = V(t)dt \qquad W = \int F(t) \cdot V(t)dt = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}t\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}t^2\right)dt$

ostatecznie $\quad W = \int_0^2 \left(-t + \frac{1}{4}t^3\right)dt = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}t^4 \Big|_0^2 = -1J$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int g(x)dx = \left| \begin{matrix} podstawienie: \\ x = f(u) \\ dx = f'(u)du \end{matrix} \right| = \int g(f(u)) \cdot f'(u)\, du$$

Przykłady

A. $\int \frac{dx}{ax+b} = \left| \begin{matrix} podstawienie: \\ ax + b = u \\ a \cdot dx = du \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{a} ln|u| + C = \frac{1}{a} ln|ax + b| + C$

B. $\int x\sqrt{1 + x^2}dx = \left| \begin{matrix} podstawienie: \\ 1 + x^2 = u \\ 2x \cdot dx = du \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}\sqrt{u^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1 + x^2)^3} + C$

C. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}} = \left| \begin{matrix} podstawienie: \\ x^2 = u \\ 2x \cdot dx = du \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = \frac{1}{2} ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| + C =$

$$= \frac{1}{2} ln\left|x^2 + \sqrt{x^4 - 1}\right| + C$$

Zadania do poćwiczenia

- ## Zadanie 4.

Prom kosmiczny o masie *m* zmienił promień orbity z R_1 na $R_2 = 1/3\ R_1$. Dana jest masa Ziemi i powszechna stała grawitacji G. Oblicz wartość wykonanej pracy.
Kto wykonał tę pracę?

- ## Zadanie 5.

Łódź podwodna o masie *m* z włączonymi silnikami porusza się ze stałą szybkością V_0. Znaleźć zależność szybkości łodzi od Czasu po wyłączeniu silników, jeśli opory ruchu są proporcjonalne do prędkości $F = -b \cdot V$, gdzie b to stała zależna od doskonałości hydrodynamicznej łodzi. Oblicz jaką drogę przebędzie łódź.