

Własności falowe poruszającej się cząstki

Po odkryciu efektu fotoelektrycznego stało się jasne, że światło jest zarazem falą elektromagnetyczną i zbiorem cząstek – fotonów o energii $h\omega$. Rodziło to przeczucie, że wszystkie obiekty w przyrodzie mają jednocześnie własności falowe i cząstkowe.

(1) jakie właściwości może mieć fala związana z poruszającą się cząstką o masie m ?

przez analogię, skoro foton ma energię

$$E = \hbar\omega \quad (1)$$

a cząstka energię

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

i gdy przyjmiemy, że energia porusza się z prędkością grupową

$$v = \frac{d\omega}{dk} \quad (3)$$

to z (3) i (1) możemy wyliczyć, że

$$v \cdot dk = d\omega = \frac{1}{\hbar}dE \quad (4)$$

obliczając dE/dp z formuły (2) widzimy, że

$$dE = \frac{p}{m}dp \quad (5)$$

co po podstawieniu do (4) da

$$dk = \hbar dp \quad (6)$$

po całkowaniu (6) liczba falowa poruszającej się cząstki ma postać formuły

$$k = \hbar p \quad (7)$$

stąd widzimy ostatecznie cząstka zachowuje się jak fala

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (8)$$

gdzie na podstawie (1) i (7)

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad k = \frac{p}{\hbar} \quad (9)$$

nie wiadomo na razie czym jest amplituda A tej fali

(2) a jak jest z cząstkami relatywistycznymi ?

idąc za de Broglie'm można ponownie przyjąć, że cząstka zachowuje się jak foton

$$E = \hbar \omega \quad (10)$$

a zarazem ma energię związaną z ruchem masy

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11)$$

skoro energia w fali przenosi się z prędkością grupową to

$$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{dk} \quad (12)$$

porównując (10) i (11) widzimy, że

$$\omega = \frac{mc^2}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13)$$

stąd licząc $\frac{d\omega}{dv}$ i wstawiając do (12) oraz wykorzystując formułę na pęd relatywistyczny

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (14)$$

otrzymamy

$$dk = \hbar dp \quad (15)$$

co ostatecznie da równanie identyczne jak (7) dla cząstki nie relatywistycznej

$$p = \hbar k \quad (16)$$

rozumowanie to przeprowadził po raz pierwszy L. V. De Broglie w 1923 roku.