Równanie falowe

Gdy nie było już wątpliwości, że wszystkie obiekty w przyrodzie mają własności falowe pojawiła się w fizyce potrzeba odkrycia ogólnej zasady, która pozwalałaby przyporządkować fale każdemu obiektowi w dowolnej sytuacji.

z dotychczasowych naszych rozważań (D3), wynika że np. dla cząstki swobodnej o masie m i prędkości v fala jest sinusoidalna

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \tag{1}$$

o parametrach

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \qquad\qquad k = \frac{p}{\hbar} \tag{2}$$

(stosujemy reprezentację zespoloną fali, taki jest zwyczaj w mechanice kwantowej)

(a) gdy prędkości są małe ($v << c$)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{i} \qquad p = mv \tag{3}$$

(b) a gdy prędkości są duże obowiązują wzory relatywistyczne

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad\qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

powstaje pytanie: <u>jakie równanie falowe „produkuje” falę (1)</u> ?

(a) aby je wymyślić rozpatrzmy najpierw przypadek małych prędkości

z równań (3) wynika, że

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{5}$$

jeżeli podstawimy E i p z równań (2) otrzymamy

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2 \tag{6}$$

ten związek musi być zachowany, żeby mechanika kwantowa <u>działała prawidłowo</u> (w fizyce ruchu falowego nazywa się on związkiem dyspersyjnym)

kształt równania (6) pozwala nam odgadnąć jak zbudować równanie różniczkowe zauważmy, że gdy różniczkujemy falę (1) po czasie t otrzymujemy

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -i\omega A e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega \cdot \psi(x,t) \tag{7a}$$

podobnie gdy dwukrotnie różniczkujemy po współrzędnej x mamy

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -k^2 A e^{i(kx-\omega t)} = -k^2 \psi(x,t) \tag{7b}$$

jesteśmy już o krok od odkrycia poszukiwanego równania

wystarczy (7a) pomnożyć prze i oraz (7b) przez $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\right]$ aby otrzymać

$$i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \omega \cdot \psi(x,t) \tag{8a}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\hbar}{2m}k^2 \cdot \psi(x,t) \tag{8b}$$

przyrównując (8a) do (8b) widzimy, że prawe strony dają prawdziwe równanie (6)

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$$

dlatego lewe strony dają też poprawne równanie

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \tag{9}$$

są oczywiście możliwe inne kombinacje, najbardziej praktyczna okazała się taka:

prawa strona (8a) = lewa strona (8b)

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \omega \cdot \psi(x,t) \tag{10}$$

jest tak dlatego, że jak podstawimy za $\omega = \frac{E}{\hbar}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = E \cdot \psi(x,t) \tag{11}$$

otrzymamy równanie dające falę, w sytuacji gdy znamy energię kinetyczną cząstki E.

równie to wyprowadził po raz pierwszy Schrodinger w 1926 r.

w 1933 r. otrzymał za nie nagrodę Nobla, niestety my w 2007 r. możemy otrzymać najwyżej zaliczenie

zauważmy, że zgodnie z (3) E oznacza energię kinetyczną cząstki, która jest stała w czasie trwania ruchu cząstki swobodnej,
gdy uwzględnimy że cząstka ma dodatkowo energię potencjalną $V(x)$ zależną od położenia x wówczas zachowana jest energia całkowita cząstki, a E zmienia się zgodnie z równaniem zachowania

$$E + V(x) = E_c \tag{12}$$

dlatego równanie Schrodingera ulega wówczas zmianie na

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = [E_c - V(x)]\cdot\psi(x,t) \tag{13}$$

równanie w tej postaci ma najwięcej zastosowań

(b) wyprowadzenie relatywistycznego równania falowego idzie już gładko

wiadomo, że związek (5)

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

jest w fizyce relatywistycznej zastąpiony związkiem (patrz wykłady)

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \tag{14}$$

stosując podobne sztuczki jak na etapie (7) widzimy, że aby otrzymać równanie (12) musimy falę zróżniczkować dwukrotnie po czasie t i dwukrotnie po x, przemnożyć przez odpowiednie faktory i zaproponować by równanie wyglądało tak

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = \left[\frac{mc}{\hbar}\right]^2\cdot\psi(x,t) \tag{15}$$

jest to znane relatywistyczne równanie kwantowe Kleina-Gordona

zauważmy, że dla fotonu $m = 0$ i

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

otrzymujemy identyczne równanie falowe jak z równań Maxwella

to nie jest przypadek, równania Maxwella, mimo że powstały przed mechaniką kwantową i mechaniką relatywistyczną antycypowały zgodność z tymi teoriami