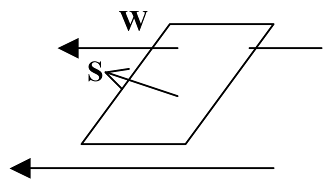
PRAWO GAUSSA.

1. Strumień pola wektorowego.

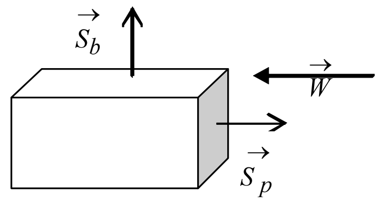
Strumień pola wektorowego o natężeniu $\vec{W}$ przechodzący przez daną powierzchnię S definiujemy:

$$\Phi = \vec{W} \circ \vec{S} \,. \quad \textbf{(1)}$$

Oznacza to, że powierzchnia przedstawiona jest za pomocą wektora doń prostopadłego, o długości proporcjonalnej do wielkości powierzchni – Rys.1.



Rys.1



Rys.2.

Obliczenie strumienia jest banalne w przypadku powierzchni płaskiej. Jeżeli natomiast powierzchnia, przez którą przechodzi strumień pola składa się z kilku płaszczyzn, wówczas całkowity strumień oblicza się sumując strumienie przechodzące przez poszczególne płaszczyzny tzn.

$$\Phi_c = \sum_i \Phi_i \quad \textbf{(2)}$$

Dla przypadku pokazanego na Rys.2. całkowity strumień $\Phi = 4\Phi_b + \Phi_{PL} + \Phi_{PP}$ gdzie Φ_b jest strumieniem przechodzącym przez ściany boczne „pudełka”, a Φ_{PL} i Φ_{PP} są strumieniami przechodzącymi odpowiednio przez podstawy z lewej i prawej strony „pudełka”.

W tym przypadku $\Phi_b = W \cdot S_b \cdot \cos 90^0 = 0$,

natomiast $\Phi_{PP} = W \cdot S_p \cdot \cos 180^0 = -W \cdot S$

oraz $\Phi_{PL} = W \cdot S_p \cdot \cos 0^0 = W \cdot S$.

Sumując te strumienie znajdujemy, że całkowity strumień przechodzący przez tę powierzchnię zamkniętą jest równy **zero**.

Podobnie należy postąpić w przypadku powierzchni, która nie jest płaska. W takiej sytuacji całą powierzchnię dzielimy na elementy $\vec{dS}$ - jak na Rys.28-2 z II t. podręcznika Halliday-Resnick. Strumień obliczamy zastępując we wzorze (2) sumowanie – całkowaniem (w tym przypadku po powierzchni zamkniętej):

$$\Phi = \oint \vec{W} \circ \vec{dS} \qquad \textbf{(3)}$$

Oczywiście, matematycznie może to być mniej lub bardziej skomplikowane – zależnie od kąta między wektorem natężenia pola a wektorem dS.

2. Prawo Gaussa.

Najprostsze sformułowanie tego prawa może być następujące:

Całkowity strumień pola wektorowego, przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do źródła tego pola zamkniętego wewnątrz tej wybranej powierzchni.

W przypadku **pola grawitacyjnego:** $\Phi = -4\pi G \cdot m$ gdzie m jest masą zamkniętą wewnątrz wybranej przez nas powierzchni Gaussa, będącą źródłem pola grawitacyjnego, a G powszechną stałą grawitacji.

Dla **pola elektrostatycznego:** $\Phi = \frac{1}{\varepsilon_o} \cdot q$ gdzie q jest źródłem pola elektrostatycznego, a ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni.

Biorąc pod uwagę poznane definicje strumienia prawo Gaussa możemy więc zapisać:

Pole grawitacyjne:

$$\oint \vec{g} \circ \vec{dS} = -4\pi G m \quad \textbf{(4)}$$

Pole elektrostatyczne:

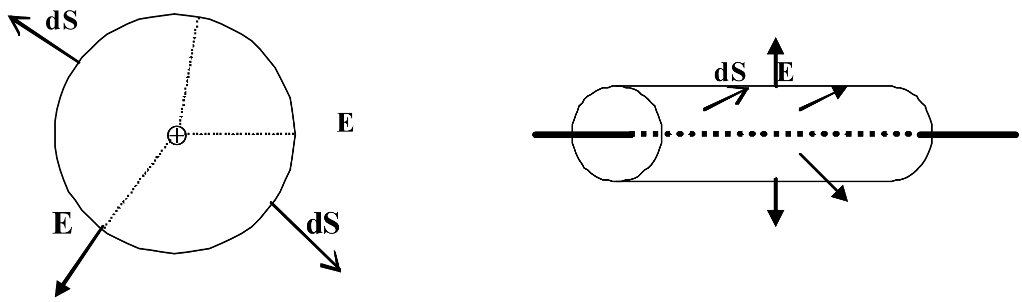
$$\oint \vec{E} \circ \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_o} \cdot q \quad \textbf{(5)}$$

3. Zastosowanie prawa Gaussa.

3.1. Wybór powierzchni Gaussa.

W każdym rozpatrywanym przez nas przypadku podstawowe znaczenie ma odpowiedni dobór powierzchni Gaussa. Samo sformułowanie prawa pozostawia nam całkowitą dowolność w wyborze powierzchni - jednakże pamiętając o możliwych trudnościach matematycznych, należy tak dobierać powierzchnie Gaussa, aby późniejsze obliczenia były jak najłatwiejsze. Generalną zasadą, jaką należy się kierować, jest taki wybór powierzchni, aby jej symetria odpowiadała symetrii źródła. W najprostszym przypadku – źródła punktowego, dającego pole o symetrii sferycznej oczywistym wyborem powierzchni Gaussa będzie sfera mająca taka samą symetrię. Dla źródła wykazującego symetrię osiową najbardziej odpowiednią powierzchnia Gaussa będzie walec – jak na Rys.3. Taki wybór

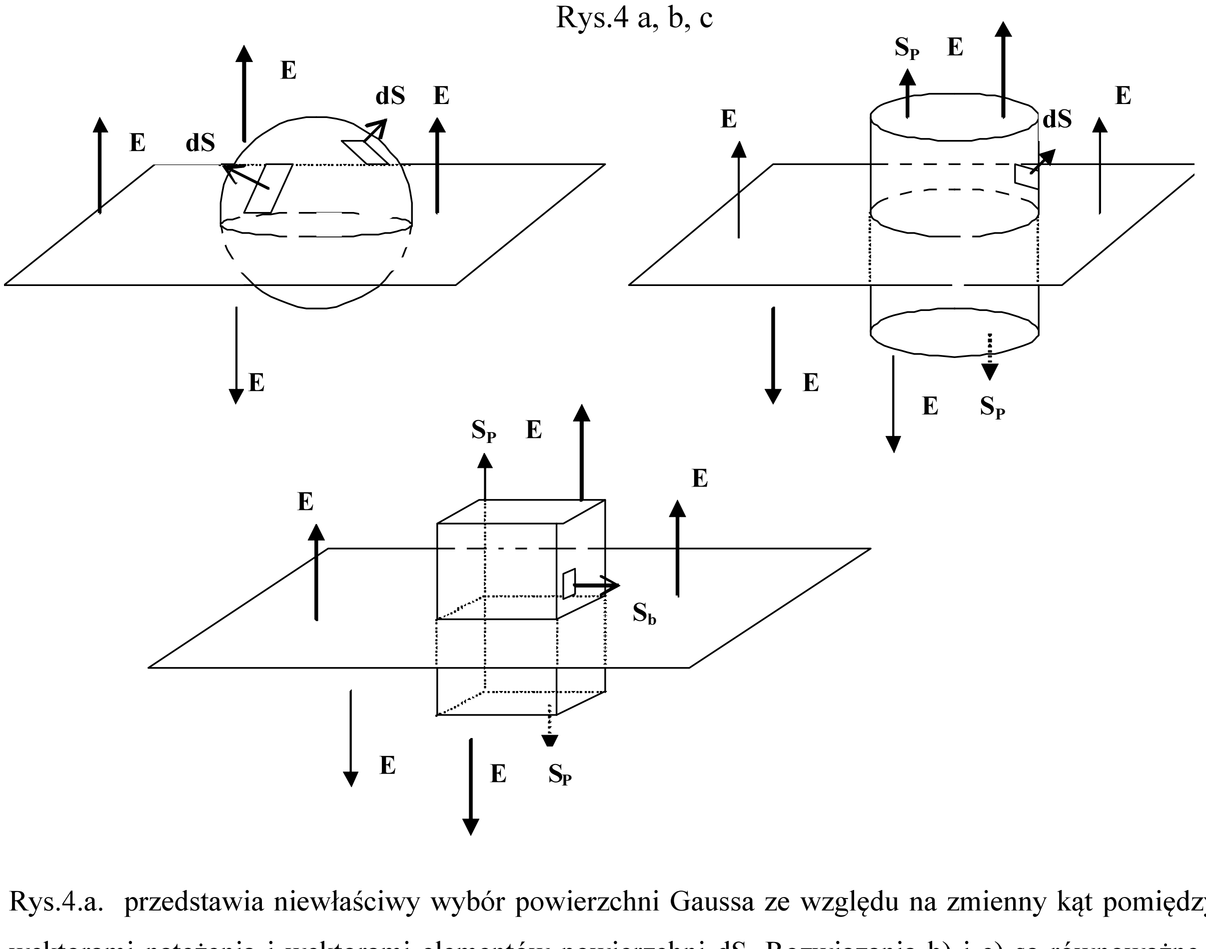
Rys.3



powierzchni daje dwojakie korzyści: po pierwsze stały jest kąt pomiędzy wektorem natężenia pola a wektorem **dS**, a po drugie – stała jest również wartość wektora natężenia pola w każdym punkcie powierzchni Gaussa.

Nieco inaczej wygląda wybór powierzchni Gaussa w przypadku rozpatrywania pola wytwarzanego przez płaszczyznę. Pole takie (obojętne grawitacyjne lub elektrostatyczne) jest jednorodne – wektory natężenia są prostopadłe do płaszczyzny. W takiej sytuacji należy tak wybrać zamkniętą powierzchnię Gaussa, aby wektory natężenia były albo prostopadłe albo równoległe do płaszczyzn tworzących powierzchnię Gaussa. Oczywiście wybrana powierzchnia musi zawierać w sobie część płaszczyzny wytwarzającej pole. Ilustrują to następujące rysunki:

Rys.4 a, b, c



Rys.4.a. przedstawia niewłaściwy wybór powierzchni Gaussa ze względu na zmienny kąt pomiędzy wektorami natężenia i wektorami elementów powierzchni dS. Rozwiązania b) i c) są równoważne i poprawne – strumień przechodzący przez ściany boczne jest równy zero, a strumienie przechodzące przez podstawy są łatwe do policzenia.

3.2. Obliczenie strumienia pola.

Kolejny krok w zastosowaniu prawa Gaussa polega na właściwym obliczeniu strumienia pola na podstawie wzorów (2) lub (3). O ile sama powierzchnia Gaussa została wybrana prawidłowo, krok ten nie powinien nastręczać żadnych trudności. Pamiętać należy jedynie o sprawdzeniu zwrotów wektorów natężenia pola i elementu dS – gdy są zgodne, kąt między nimi wynosi 0^0 a zatem cos 0^0 =1 w przypadku zwrotów przeciwnych cos 180^0 = **-1**

3.3. Obliczenie wielkości źródła zawartego wewnątrz powierzchni Gaussa.

Trzecim, kolejnym krokiem przy zastosowaniu prawa Gaussa jest obliczenie, jaka masa lub ładunek jest zawarty wewnątrz wybranej przez nas powierzchni Gaussa. Jeżeli w rozpatrywanym zagadnieniu mamy do czynienia z objętościowym rozkładem masy lub ładunku, wówczas można określić (lub jest dana) jego gęstość objętościowa: dla masy $\rho = \frac{m}{V}$ lub dla ładunku $\rho = \frac{q}{V}$. Dla rozkładu powierzchniowego definiujemy gęstość powierzchniową $\delta = \frac{m}{S}$ lub analogicznie $\delta = \frac{q}{S}$. Przy liniowym rozkładzie masy lub ładunku (np. na jednowymiarowej nici) mówimy o gęstości liniowej definiowanej jako $\lambda = \frac{m}{L}$ lub $\lambda = \frac{q}{L}$.

W powyższych wzorach V, S oraz L oznaczają odpowiednio objętość, powierzchnię lub długość **wyłącznie** tej części źródła pola, która jest zawarta **wewnątrz** wybranej powierzchni Gaussa. Tak więc, skoro gęstości fragmentu źródła są takie same jak całości, z wzorów tych można łatwo obliczyć potrzebną wartość *m* lub *q*.

3.4. Krok ostatni – połączenie dokonanych obliczeń.

Mając teraz obliczoną lewą stronę równań (4) lub (5) – patrz p.3.2, oraz prawą stronę tych równań – p.3.3 pozostaje nam teraz tylko połączyć otrzymane wyniki w jedno równanie, a następnie wyliczyć potrzebną wartość natężenia pola grawitacyjnego *g* lub pola elektrostatycznego *E*.

Sądzę, że właściwe będzie zilustrowanie tych rozważań konkretnymi przykładami.