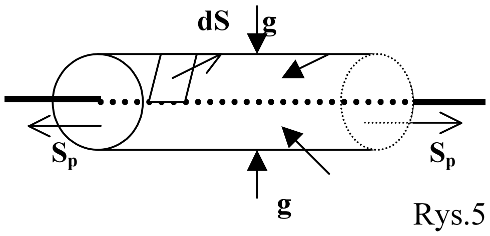
4. Przykłady.

W poniższych przykładach wyznaczać będziemy natężenie pola w odległości r od jednorodnej, nieskończonej nici, płaszczyzny jednorodnie naładowanej z gęstością powierzchniową ładunku δ, oraz kuli o gęstości ρ.

4.1. Liniowy rozkład masy.

Masa rozłożona jest równomiernie na nieskończonej nici o gęstości liniowej λ. Jak widać na rysunku, pole ma symetrię osiową, a więc korzystny jest wybór powierzchni Gaussa w kształcie walca



Rys.5

o długości L i promieniu r. Pamiętajmy, że wektor natężenia pola grawitacyjnego **g** jest zwrócony **do masy**, czyli przeciwnie do

wektora **ds** pobocznicy.

Całkowity strumień przechodzący przez tę powierzchnię składa się ze strumienia przechodzącego przez pobocznicę walca i strumieni przechodzących przez obie jego podstawy:

$\Phi_C = \Phi_b + 2\,\Phi_p$ Strumienie te obliczamy korzystając z wzorów z p.1.

$\Phi_p = \vec{g} \circ \vec{S} = g \cdot S \cdot \cos 90^0 = 0$ gdzie S jest polem powierzchni podstawy walca. Z kolei Φ_b:

$$\Phi_b = \int_{S_b} \vec{g} \circ \vec{dS} = \int_{S_b} g \cdot \cos 180^0\, dS = -g \int_{S_b} dS = -g \cdot 2\pi r L$$

Całkowity więc strumień $\Phi_C = -2\pi r L g$

Obliczamy teraz masę zawartą **wewnątrz** wybranej powierzchni Gaussa. Ponieważ nić jest jednorodna, gęstość tej jej części, która jest zawarta wewnątrz walca jest:

$\lambda = \frac{m}{L}$ a zatem $m = \lambda L$

Podstawiając otrzymane rezultaty do równania Gaussa otrzymujemy:

$-2\pi r L g = -4\pi G \cdot \lambda L$ stąd

$$\boxed{g = \frac{2G\lambda}{r}}$$

4.2. Powierzchniowy rozkład ładunku.

Jednorodnie dodatnio naładowana płaszczyzna z gęstością powierzchniową ładunku δ wytwarza po obu stronach jednorodne pole elektryczne o natężeniu **E**. Na podstawie dyskusji w p. 3.1. wybieramy przykładowo powierzchnię w kształcie prostopadłościanu „wystającego" ponad naładowaną płaszczyznę na wysokość r.

Całkowity strumień obliczamy ze wzoru: $\Phi_C = 4\Phi_b + 2\,\Phi_p$ gdzie Φ_b oznacza strumień przechodzący przez powierzchnie boczne prostopadłościanu, a Φ_p to strumienie przechodzące przez jego podstawy.

Na podstawie rysunku możemy zapisać:

$\Phi_b = \vec{E} \circ \vec{S_b} = E \cdot S_b \cdot \cos 90^0 = 0$ natomiast

$\Phi_p = \vec{E} \circ \vec{S_p} = E \cdot S_p \cdot \cos 0^0 = E \cdot S_p$ tak więc

$\Phi_C = 2E \cdot S_p$

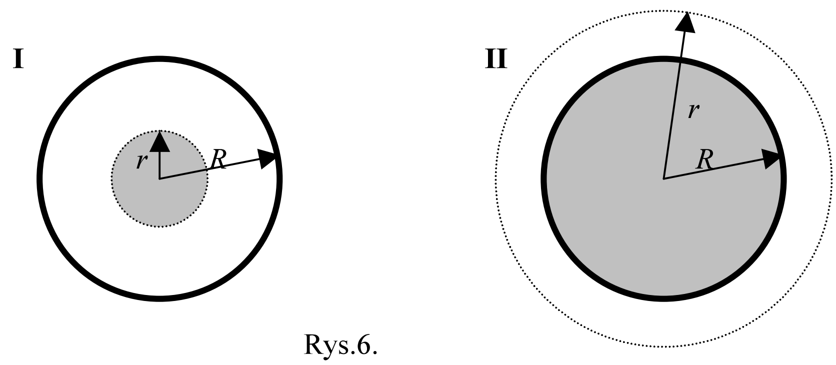
Ładunek zawarty wewnątrz prostopadłościanu znajduje się na fragmencie powierzchni o wielkości S_p i ma gęstość δ. Można więc zapisać: $q = S_p \cdot \delta$

Podstawiając te wyniki do równania Gaussa otrzymujemy:

$2E \cdot S_p = \dfrac{S_p \delta}{\varepsilon_o}$ a zatem $\boxed{E = \dfrac{\delta}{2\varepsilon_o}}$

4.3. Objętościowy rozkład masy.

Naszym zadaniem jest wyznaczenie zależności natężenia pola grawitacyjnego od odległości od środka jednorodnej kuli o promieniu R, masie M i gęstości objętościowej ρ. Jak widać z Rys.4. przy wyborze powierzchni Gaussa w kształcie sfery, dla każdego punktu jej powierzchni wektor natężenia pola ma taka samą wartość i jest równoległy do wektora $\vec{dS}$. Zauważmy jednak, że w tym przypadku mamy do czynienia z dwoma charakterystycznymi obszarami: jednym wewnątrz kuli, a drugim na zewnątrz – patrz Rys.6.



Rys.6.

Linią przerywaną zaznaczone są wybrane powierzchnie Gaussa, natomiast kolorem szarym wyróżniono masę znajdującą się wewnątrz tych powierzchni.

Dla pierwszego obszaru $r < R$

Strumień $\Phi = \oint\limits_S \vec{g} \circ \vec{dS} = \oint\limits_S g \cdot \cos 180^0 \, dS = -g \oint\limits_S dS = -g \cdot 4\pi r^2$

Masa wytwarzająca ten strumień jest częścią kuli – zaznaczoną na lewym rysunku kolorem szarym, a

więc: $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Stąd $-g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ a zatem $\boxed{g = \frac{4}{3}\pi G \rho r}$

W drugim obszarze $r > R$

Strumień obliczamy identycznie jak w obszarze pierwszym czyli $\Phi = -g \cdot 4\pi r^2$

Natomiast masą wytwarzającą ten strumień jest w tym przypadku cała masa kuli, tzn.:

$m = M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

W takim przypadku równanie Gaussa ma postać:

$-g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ a więc $\boxed{g = \frac{4}{3}\frac{\pi G \rho R^3}{r^2}}$

Sporządzenie odpowiednich wykresów pozostawiam już zainteresowanym.

Dr Z.Szklarski